Sommes et sommes directes

◇ On revient ici sur trois notions très liées : les sommes de sous-espace vectoriels, les sommes directes et les sous-espaces supplémentaires.

◇ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

Que désigne la notation $F+G$? On note :

$$F+G=\left\{x\in E \mid \exists (y,z)\in F\times G,\ x=y+z\right\}$$

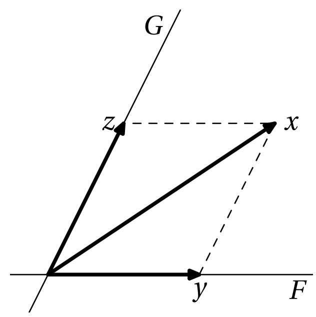
Autrement dit, $F+G$ est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. On dit que $F+G$ est la somme des sous-espaces F et G, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E (c'est le plus petit sous-espace de E contenant à la fois F et G au sens suivant : si H est un sous-espace de E tel que $F\subset H$ et $G\subset H$, alors $F+G\subset H$). On pourra retenir que si $F=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et $G=\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_q)$, alors $F+G=\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p,v_1,\dots,v_q)$.

Comment démontrer que $F+G=E$? Il suffit de démontrer que tout vecteur $x\in E$ peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Remarque. Si H est également un sous-espace vectoriel de E, pour démontrer que $F+G=H$, il faut d'abord démontrer que $F\subset H$ et $G\subset H$, ensuite on démontre que tout élément de H peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. □

Qu'est-ce qu'une somme directe? On dit que la somme $F+G$ est directe lorsque pour tout $x\in F+G$, il existe un unique couple $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. Lorsque c'est le cas, la somme est notée $F\oplus G$. Ceci permet de réaliser des identifications : si la somme $F+G$ est directe et si $y+z=y'+z'$ avec $y,y'\in F$ et $z,z'\in G$, alors $y=y'$ et $z=z'$.

Quand dit-on que F et G sont des sous-espaces supplémentaires? On dit que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E lorsque la somme $F+G$ est directe et est égale à E. On note alors $E=F\oplus G$. Ceci signifie que tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G. Plus précisément, si $x\in E$, alors il existe un unique couple $(y,z)\in F\times G$ tel que $x=y+z$. On dit que y est le projeté de x sur F parallèlement à G et z est le projeté de x sur G parallèlement à F. Il faut retenir la représentation graphique ci-contre.



Comment démontrer que $E = F \oplus G$**?** Il y a beaucoup de manières de procéder. On utilisera souvent l'une des méthodes suivantes :

- Considérer $x \in E$ et démontrer qu'il existe un unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y+z$;
- Si E est de dimension finie, considérer $\mathscr{B}_1$ base de F, $\mathscr{B}_2$ base de G et démontrer la la réunion de $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ est une base de E.

Pour la première méthode, on utilise souvent un raisonnement par analyse et synthèse que l'on présente (ou rappelle) dans l'exemple suivant.

Exemple. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G définis par :

$$F = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = M\right\}; \qquad G = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid M^\top = -M\right\}$$

Démontrer que $F \oplus G = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (on admet que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).
→ On va faire un raisonnement par analyse et synthèse. Dans la partie analyse, on considère un élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et *on suppose* qu'il peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On cherche alors à déterminer l'expression de ces deux éléments. Ceci permet (en général) de démontrer que si la décomposition existe, alors elle est unique. Dans la partie synthèse, on reprend les éléments obtenus et on vérifie qu'ils appartiennent bien à F et G respectivement et que leur somme est égale à l'élément donc on est parti. **Analyse.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et *supposons* qu'il existe $A \in F$ et $B \in G$ telles que :

$$M = A + B \tag{$*$}$$

Comme les hypothèses que l'on a sur A et B font intervenir les transposées, on applique la transposée à l'égalité ci-dessus. On obtient alors $M^\top = (A+B)^\top$ et comme la transposition est linéaire : $M^\top = A^\top + B^\top$. Comme $A^\top = A$ et $B^\top = -B$, on en déduit :

$$M^\top = A - B \tag{**}$$

En ajoutant et en retranchant les égalités $(*)$ et $(**)$, on obtient :

$$M + M^\top = 2A; \qquad M - M^\top = 2B$$

et on en déduit :

$$A = \frac{M+M^\top}{2}; \qquad B = \frac{M-M^\top}{2}$$

On en déduit en particulier que *si la décomposition M en somme d'un élément de F et d'un élément de G existe,* alors cette décomposition est unique. **Synthèse.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *on pose :*

$$A = \frac{M+M^\top}{2}; \qquad B = \frac{M-M^\top}{2}$$

On a alors clairement $A + B = M$ et de plus, par linéarité de la transposition :

$$A^\top = \frac{M^\top + (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top + M}{2} = A$$
$$B^\top = \frac{M^\top - (M^\top)^\top}{2} = \frac{M^\top - M}{2} = -B$$

Par conséquent, $A \in F$ et $B \in G$. Ceci montre que toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. D'après ce qui précède, cette décomposition est unique. Par conséquent $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = F \oplus G$. □