Sous-espaces engendrés

◇ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Que désigne la notation $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ **?** Si $u_1,\dots,u_p$ sont des éléments de E, alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1,\dots,u_p$, ce qui signifie que :

- $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $\forall i \in [\![1,p]\!]$, $u_i \in \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$;
- Si H est un sous-espace vectoriel de E tel que $u_1,\dots,u_p \in H$, alors $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) \in H$.

De manière équivalente, mais plus explicite, $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1,\dots,u_p$:

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) = \left\{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p\right\}$$

Remarque. $\mathrm{Vect}(u_1) = \{\lambda u_1 \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est aussi noté $\mathbb{K}u_1$. Avec cette notation, on peut également écrire :

$$\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p) = \mathbb{K}u_1 + \cdots + \mathbb{K}u_p$$ □

⚠ $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ est un sous-espace vectoriel de E, ce n'est donc pas un élément de E. Noter aussi que $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ se lit « sous-espace engendré par $u_1,\dots,u_p$. » Le terme « Vect » ne veut pas dire « vecteur. »

Quand utilise-t-on la notation $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ **?** Les situations usuelles :

- Lorsque l'on veut démontrer qu'un sous-ensemble F de E est un sous-espace vectoriel, on peut démontrer qu'il existe $u_1,\dots,u_p$ éléments de E tels que $F = \mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ (premier exemple ci-dessous) ;
- Lorsque l'on veut donner une description explicite d'un sous-espace vectoriel (deuxième exemple ci-dessous).

Exemple. Démontrer que $F = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

→ Attention à la rédaction. On a :

$$\begin{aligned} F &= \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \mid x,y,z \in \mathbb{R} \text{ et } x+y+z=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ -x-y\end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{x\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \mid x,y \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, F est le sous-espace engendré par $\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$, en particulier F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. □

Exemple. Soit $n \geqslant 2$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = X^2 P'' - XP' + P$$

Déterminer $\mathrm{Im}(f)$.

➞ On sait que la famille $(1, X, \dots, X^n) = (X^k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Par conséquent, la famille $(f(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Ainsi :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), \dots, f(X^n)) = \mathrm{Vect}(f(X^k))_{0\leqslant k\leqslant n}$$

On a $f(1) = 1$, $f(X) = 0$ et si $2 \leqslant k \leqslant n$:

$$f(X^k) = X^2 k(k-1)X^{k-2} - XkX^{k-1} + X^k = (k(k-1) - k + 1)X^k = (k-1)^2 X^k$$

Ainsi : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, 0, X^2, 4X^3, \dots, (n-1)^2 X^n) = \mathrm{Vect}(1, X^2, X^3, \dots, X^n)$. $\square$

Différentes descriptions pour un même sous-espace. De manière générale, un sous-espace vectoriel (par exemple dans $\mathbb{K}^n$) peut être décrit avec des équations ou comme espace engendré par une famille de vecteurs. Voyons comment on peut passer d'une description à l'autre. Considérons par exemple le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$:

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid x + 2y + 3z - t = 0 \text{ et } x + y + z + t = 0 \right\}$$

On considère le système formé par les deux équations et on applique la méthode du pivot. Ceci permet d'exprimer certaines inconnues en fonction des autres :

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ -y - 2z + 2t = 0 \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z - t = 0 \\ y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

On peut exprimer x et y en fonction de z et t :

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in F \iff \begin{cases} x = z - 3t \\ y = -2z + 2t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-3t\\-2z+2t\\z\\t \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3\\2\\0\\1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\-2\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3\\2\\0\\1 \end{pmatrix}\right)$. Partons maintenant d'un sous-espace engendré, par exemple :

$$G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix}\right)$$

et cherchons à quelle condition un vecteur $\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$ appartient à G :

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in G \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{pmatrix} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda - \mu = y \\ \mu = z \\ -\mu = t \end{cases}$$

On obtient un système dont les inconnues sont λ et μ et qui possède des solutions si, et seulement si, $\begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in G$. On utilise la méthode du pivot :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = x \\ \lambda - \mu = y \\ \mu = z \\ -\mu = t \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ -2\mu = y - x \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \mu = z \\ 0 = t + z \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = x \\ 0 = y - x + 2z \quad {\scriptstyle L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \\ \mu = z \\ 0 = t + z \quad {\scriptstyle L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \end{cases}$$

Ce système possède des solutions si, et seulement si, $t + z = 0$ et $y - x + 2z = 0$. Ainsi :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x\\y\\z\\t \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4 \mid t + z = 0 \text{ et } y - x + 2z = 0 \right\}$$