Sous-espaces vectoriels

◇ E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Comment démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E ? Il y a trois points à établir :

❶ $F \subset E$ (en général c'est évident) ;

❷ $F \neq \emptyset$ (en général, on vérifie que $0_E \in F$) ;

❸ On considère $u, v \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et on démontre que $\lambda u + v \in F$.

Exemple. On considère $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on définit :

$$F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid AM = MA\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
→ Par définition de F, on a $F \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ ❶. Si on note 0_n la matrice nulle (de taille $n \times n$), alors on a $A \times 0_n = 0_n$ et $0_n \times A = 0_n$ donc $A \times 0_n = 0_n \times A$ et $0_n \in F$. Par conséquent F est non vide ❷. Soient M et N deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{C}$. Avec les propriétés des opérations sur les matrices :

$$A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda MA + NA$$

(car $AM = MA$ puisque $M \in F$ et $AN = NA$ puisque $N \in F$). On en déduit que $A(\lambda M + N) = (\lambda M + N)A$ et ceci montre que $\lambda M + N \in F$ ❸. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. □

Exemple. On note F l'ensemble des suites (u_n) à valeur dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
→ Rappelons que $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ❶. La suite constante égale à 0 satisfait la condition donnée, donc F est non vide ❷. Soient $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites appartenant à F. On pose $w = \lambda u + v$, on note cette suite $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors $w_n = \lambda u_n + v_n$ et ainsi :

$$\begin{aligned} w_{n+2} - w_{n+1} - w_n &= (\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) - (\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) - (\lambda u_n + v_n) \\ &= \lambda(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) + (v_{n+2} - v_{n+1} - v_n) \end{aligned}$$

Or $u \in F$ et $v \in F$, donc $u_{n+2} - u_{n+1} - u_n = 0$ et $v_{n+2} - v_{n+1} - v_n = 0$ et ainsi :

$$w_{n+2} - w_{n+1} - w_n = \lambda(u_{n+2} - u_{n+1} - u_n) + (v_{n+2} - v_{n+1} - v_n) = 0$$

Ceci montre que $w \in F$ ❸. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. □

⚠ Lorsque l'on veut vérifier la condition ❸ dans le cas où l'on travaille avec des suites, il est vivement conseillé de considérer deux suites u et v appartenant à F, notées $u = (u_n)_{n\geqslant 0}$ et $v = (v_n)_{n\geqslant 0}$, poser $w = \lambda u + v$, notée $w = (w_n)_{n\geqslant 0}$ avec $w_n = \lambda u_n + v_n$ pour tout n. Il faut alors montrer que $w \in F$ et on peut pour cela travailler avec les termes w_n de la suite w et ces termes s'expriment en utilisant u_n et v_n.

Exemple.

$$F = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\right\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
➞ Rappelons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$; c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Par définition, on a $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ❶. Si f est la fonction nulle, c'est à dire :

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 0 \end{array}$$

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = 0 = f(x)$ donc $f \in F$ ce qui montre que F est non vide ❷. Soient f_1 et f_2 deux éléments de F et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $g = \lambda f_1 + f_2$. On a alors $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = (\lambda f_1 + f_2)(-x) = \lambda f_1(-x) + f_2(-x)$$

Comme $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$, on a $f_1(-x) = f_1(x)$ et $f_2(-x) = f_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(-x) = \lambda f_1(x) + f_2(x) = g(x)$$

On en déduit que $g \in F$ ❸. Par conséquent, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. □

⚠ Lorsque l'on veut vérifier la condition ❸ dans le cas où l'on travaille avec des fonctions, il est vivement conseillé de considérer deux fonctions f_1 et f_2 appartenant à F et de poser $g = \lambda f_1 + f_2$. Il faut alors montrer que $g \in F$.