# Rappels sur les séries numériques

⚠ Ne pas confondre les notations :

- $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ est la *série de terme général* $u_n$ (avec $u_n$ défini pour $n \geqslant n_0$) ;
- $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est la *somme de cette série*, elle n'est définie qu'en cas de convergence ;
- $\sum u_n$ abrège $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ et désigne donc également la série.

On peut considérer la série indépendamment du fait qu'elle converge ou pas. On ne peut considérer la somme que si la série est convergente.

**Théorème 1 – Condition nécessaire de convergence**

*Si la série numérique* $\sum u_n$ *converge, alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *(réciproque fausse).*

⋄ Contre-exemple pour la réciproque (à connaitre) : si $u_n = 1/n$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et pourtant la série $\sum u_n$ diverge.

**Définition 2 – Convergence absolue**

*On dit que la série numérique* $\sum u_n$ *converge absolument lorsque la série* $\sum |u_n|$ *converge.*

**Théorème 3 – Convergence absolue implique convergence**

*Si la série numérique* $\sum u_n$ *est absolument convergente, alors elle est converge (réciproque fausse).*

⋄ Contre-exemple pour la réciproque (à connaitre) : si $u_n = (-1)^n/n$, alors la série $\sum u_n$ est convergente mais ne converge pas absolument.

**Théorème 4 – Séries de référence**

*On a les résultats suivants :*

(1) *Pour $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum q^n$ converge si, et seulement si, $|q| < 1$ et, lorsque c'est le cas :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

(2) *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.*

**Théorème 5 – Comparaisons**

*Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. On a les résultats suivants :*

(1) *Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ apcr et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;*
(2) *Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $v_n \geqslant 0$ apcr et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge) ;*
(3) *Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, $v_n \geqslant 0$ apcr et $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge) ;*
(4) *Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \geqslant 0$ apcr, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

◇ Attention à travailler avec des séries à termes positifs :

- si $u_n = -1$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$, alors $u_n \leqslant v_n$ et $\sum v_n$ converge mais $\sum u_n$ diverge.

Aux points (1), (2) et (3), on ne peut rien déduire sur $\sum u_n$ lorsque $\sum v_n$ diverge. Par exemple :

- si $u_n = \frac{1}{n^2}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum u_n$ converge ;
- si $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, alors $\sum v_n$ diverge et $\sum u_n$ diverge.