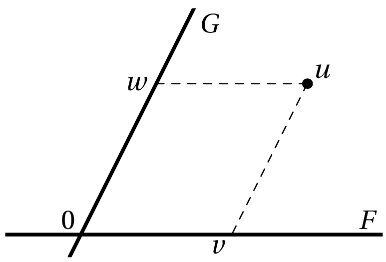
Projecteurs et symétries

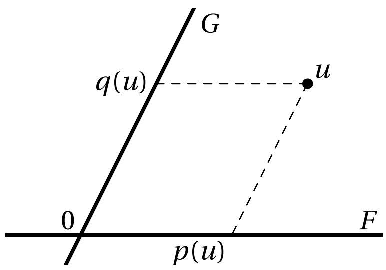
◇ E est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

I. Projecteurs

◇ On dit que F et G sont des sous-espaces supplémentaires de E lorsque pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. *Illustration graphique :*



Posons alors $p(u) = v$, ceci permet de définir une application p de E dans E. On dit que p est le projecteur sur F parallèlement à G. De la même manière, on peut poser $q(u) = w$ ce qui définit une application q de E dans E et on dit que q est le projecteur sur G parallèlement à F. On dit aussi que q est le projecteur associé à p. *Illustration graphique :*



On démontre alors que p et q sont des application linéaires, ce sont donc des endomorphismes de E. De plus, pour tout $u \in E$, $p(u) + q(u) = u$ c'est à dire $p + q = \mathrm{id}_E$.

◇ On remarque que par définition pour tout $u \in E$, $p(u) \in F$. De plus, pour tout $u \in G$, $p(u) = 0$. Ceci montre que $\operatorname{Im} p \subset F$ et $G \subset \operatorname{Ker} p$. On démontre que l'on a en fait $\operatorname{Im} p = F$ et $\operatorname{Ker} p = G$. On dit que F et G sont les sous-espaces associés au projecteur p (ou sous-espaces caractéristiques du projecteur p ou encore directions de p). Comme pour $u \in E$ on a $p(u) \in F$, on a alors $p(p(u)) = p(u)$. Ceci se note également $p \circ p = p$ ou encore $p^2 = p$.

◇ Réciproquement, si p est un endomorphisme de E et $p^2 = p$, alors p est un projecteur de E, c'est le projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$.

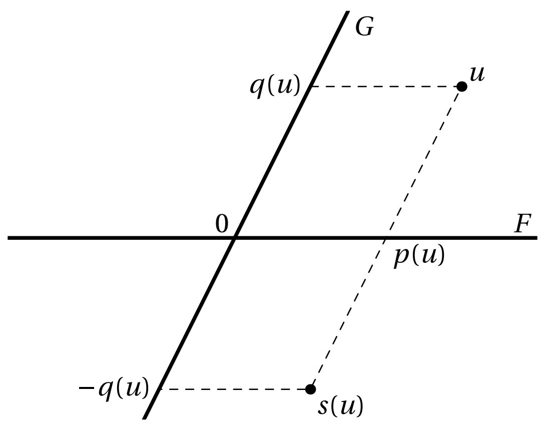
◇ Matrice dans une base adaptée. Dans le cas où E est de dimension finie, posons $n = \dim E$, $r = \dim F$ et ainsi $\dim G = n - r$ (car $F \oplus G = E$). On considère $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F et $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ une base de G. On sait alors que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E (théorème de concaténation des bases). De plus pour $i \in [\![1, r]\!]$, $e_i \in F$ donc son projeté sur F parallèlement à G est $p(e_i) = e_i$. Pour $i \in [\![r+1, n]\!]$, $e_i \in G$ donc son projeté sur F parallèlement à G est $p(e_i) = 0$. Ainsi :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & & (0) & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ (0) & & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & & (0) \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & (0) & & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow \text{ligne } 1 \\ \\ \leftarrow \text{ligne } r \\ \leftarrow \text{ligne } r+1 \\ \\ \leftarrow \text{ligne } n \end{array}$$

On en déduit en particulier que $\operatorname{rg}(p) = r = \dim F = \operatorname{tr}(M) = \operatorname{tr}(p)$.

II. Symétries

◇ On suppose à nouveau F et G sous-espaces supplémentaires de E. Pour $u \in E$, il existe un unique couple $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$. On pose alors $s(u) = v - w$. Ceci définit à nouveau une application linéaire s de E dans E et on dit que s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. *Illustration graphique :*



On dit encore que F et G sont les sous-espaces caractéristiques de la symétrie.

◇ On remarque que si $u \in F$, alors $s(u) = u$ *i.e.* $u \in \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$ et si $u \in G$, alors $s(u) = -u$ *i.e.* $u \in \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$. On en déduit $F \subset \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$ et $G \subset \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$. On peut en fait montrer que l'on a $F = \operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$. De plus, pour $u \in E$, on note que $s(s(u)) = u$ c'est à dire $s \circ s = \operatorname{id}_E$.

◇ Réciproquement, si s est un endomorphisme de E et $s^2 = \operatorname{id}_E$, alors s est unee symétrie de E, c'est la symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \operatorname{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{id}_E)$.

◇ En reprenant les notations précédentes ($u = v + w$, $p(u) = v$, $q(u) = w$ et $s(u) = v - w$) on obtient $p + q = \operatorname{id}_E$ donc $q = \operatorname{id}_E - p$ et $s = p - q$ donc $s = 2p - \operatorname{id}_E$.