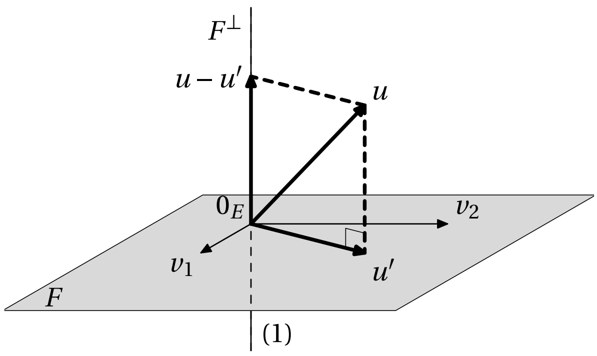
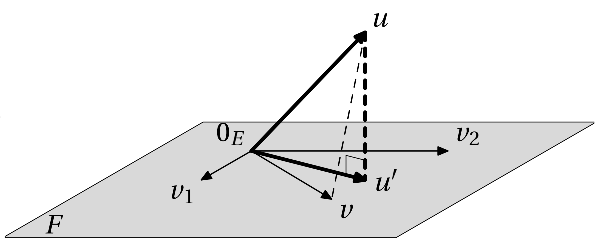
Projeté orthogonal

⋄ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire et F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

Qu'est-ce que le projeté orthogonal de $u \in E$ sur F ? C'est l'unique vecteur u' tel que $u' \in F$ et $u' - u \in F^{\perp}$ (ce qui signifie : quel que soit $v \in F$, $\langle u' - u, v\rangle = 0$). Il faut retenir la représentation graphique (1) ci-dessous (dans le cas particulier où F est de dimension 2)



(1)



(2)

Comment déterminer le projeté orthogonal de $u \in E$ sur F ?

- Supposons que l'on connaisse une base $(v_1, \dots, v_p)$ de F. Notons u' le projeté orthogonal de u sur F, alors $u' \in F$ donc on peut décomposer u' sous la forme :

$$u' = x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p$$

avec $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}$. On sait de plus que $u' - u$ est orthogonal à tout vecteur de F, donc en particulier :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \left\langle u' - u, v_i \right\rangle = 0$$

On obtient donc le système $\begin{cases} \langle u' - u, v_1\rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle u' - u, v_p\rangle = 0 \end{cases}$ c'est à dire :

$$\begin{cases} \left\langle x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p, v_1 \right\rangle = \langle u, v_1\rangle \\ \vdots \\ \left\langle x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p, v_p \right\rangle = \left\langle u, v_p \right\rangle \end{cases}$$

C'est un système à p équations et p inconnues qui permet de déterminer $x_1, \dots, x_p$ et d'en déduire u'.

- Si on dispose d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ de F, alors : $u' = \langle e_1, u\rangle e_1 + \cdots + \langle e_p, u\rangle e_p$.

À quoi sert le projeté orthogonal de u sur F ? La distance entre u et u' représente la plus petite distance entre u et un élément de F. Formellement :

$$\left\| u - u' \right\| = \min\{\|u - v\| \mid v \in F\}$$

Si on reprend les notations précédentes (avec $(v_1, \dots, v_p)$ base de F) :

$$\left\| u - u' \right\| = \min\left\{ \left\| u - (x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p) \right\| \mid x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi, u' est l'élément de F le plus proche de u comme on le voit sur la figure (2) donnée plus haut (le projeté orthogonal de u est en quelque sorte la meilleure approximation possible de u par un élément de F).

Exemple. On considère l'espace vectoriel $E = \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par :

$$\forall f, g \in E,\ \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g(t)\, \mathrm{d}t$$

(a) On considère les fonctions $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$ (définies et continues sur $[0,1]$). Déterminer le projeté orthogonal de f_2 sur $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$.

(b) Déterminer $d = \inf\limits_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \displaystyle\int_0^1 (\mathrm{e}^t - \alpha t - \beta)^2\, \mathrm{d}t$.

→ On note g le projeté orthogonal de f_2 sur F (qui est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E). Comme $g \in F$, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $g = a f_1 + b f_0$. Par définition de la projection orthogonale, on doit avoir $f_2 - g \in F^{\perp}$, or $F = \mathrm{Vect}(f_0, f_1)$ donc on doit avoir en particulier $(f_2 - g) \perp f_0$ et $(f_2 - g) \perp f_1$. Sachant que $g = a f_1 + b f_2$, on a par bilinéarité :

$$\begin{cases} b\langle f_0, f_0\rangle + a\langle f_1, f_0\rangle = \langle f_2, f_0\rangle \\ b\langle f_0, f_1\rangle + a\langle f_1, f_1\rangle = \langle f_2, f_1\rangle. \end{cases}$$

Avec $\langle f_0, f_0\rangle = \int_0^1 1\, \mathrm{d}t = 1$, $\langle f_0, f_1\rangle = \int_0^1 t\, \mathrm{d}t = 1/2$, $\langle f_1, f_1\rangle = \int_0^1 t^2\, \mathrm{d}t = 1/3$, $\langle f_2, f_0\rangle = \int_0^1 \mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = \mathrm{e} - 1$, $\langle f_2, f_1\rangle = \int_0^1 t\mathrm{e}^t\, \mathrm{d}t = 1$ (cette dernière intégrale se calcule par intégration par partie) on obtient :

$$\begin{cases} b + \frac{1}{2}a = \mathrm{e} - 1 \\ \\ \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b + \frac{1}{2}a = \mathrm{e} - 1 \\ \\ \frac{1}{12}a = 1 - \frac{1}{2}(\mathrm{e} - 1). \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6(3 - \mathrm{e}) \\ b = 4\mathrm{e} - 10 \end{cases}$$

d'où $g : t \in [0,1] \mapsto 6(3 - \mathrm{e})t + 4\mathrm{e} - 10$. Notons que la quantité d est bien définie, car un ensemble non vide de réels positifs admet toujours une borne inférieure. On a :

$$\min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \left(\int_0^1 (\mathrm{e}^t - \alpha t - \beta)^2 \right)^{1/2} = \min_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}} \left\| f_2 - \alpha f_1 - \beta f_0 \right\| = \min_{f \in \overrightarrow{(}f_0, f_1)} \left\| f_2 - f \right\| = \left\| f_2 - g \right\|$$

On en déduit (par élévation au carré) que $d = \|f_2 - g\|^2$. Il ne reste donc plus qu'à calculer cette norme :

$$\begin{aligned} d = \left\| f_2 - g \right\|^2 &= \int_0^1 (\mathrm{e}^t - at - b)^2\, \mathrm{d}t \text{ avec } a = 6(3 - \mathrm{e}) \text{ et } b = 4\mathrm{e} - 10 \\ &= 20\mathrm{e} - \frac{57}{2} - \frac{7\mathrm{e}^2}{2} \text{ après calculs.} \end{aligned}$$

□