Produit scalaire

◇ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Comment démontrer que φ est produit scalaire sur E ? Il y a cinq points à établir :

❶ φ est bien définie sur $E\times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (c'est à dire : pour tout $(x,y)\in E^2$, $\varphi(x,y)$ est bien défini et $\varphi(x,y)\in\mathbb{R}$) ;

❷ φ est bilinéaire, c'est à dire :

$$\forall x_1,x_2,y\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(\lambda x_1+x_2,y)=\lambda\varphi(x_1,y)+\varphi(x_2,y)\qquad (\varphi \text{ est linéaire à gauche})$$
$$\forall x,y_1,y_2\in E,\ \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \varphi(x,\lambda y_1+y_2)=\lambda\varphi(x,y_1)+\varphi(x,y_2)\qquad (\varphi \text{ est linéaire à droite})$$

❸ φ est symétrique, c'est à dire : $\forall x,y\in E$, $\varphi(x,y)=\varphi(y,x)$;

❹ φ est positive, c'est à dire : $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)\geqslant 0$;

❺ φ est définie-positive, c'est à dire : $\forall x\in E$, $\varphi(x,x)=0\Rightarrow x=0$.

Le point ❶ doit être établi lorsque la définition de $\varphi(x,y)$ demande des justifications (par exemple lorsque $\varphi(x,y)$ est défini comme somme d'une série). Les points ❷ et ❸ sont en général assez faciles à établir (on peut noter que si φ est linéaire à gauche et symétrique, alors elle est bilinéaire). Le point ❹ est souvent assez immédiat et le point ❺ demande systématiquement des justifications détaillées et soigneuses. Une fois que l'on a démontré que l'application φ est un produit scalaire, on utilise en général des notations du type $\langle x,y\rangle$ ou (x/y) à la place de $\varphi(x,y)$. L'exemple suivant illustre les difficultés que l'on peut rencontrer.

Exemple. Pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-n}P(n)Q(n)$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

➞ Il faut déjà démontrer que φ est bien définie et pour cela étudier la convergence de la série. Notons que pour tout polynôme $R\in\mathbb{R}[X]$, on a par croissances comparées :

$$R(n)\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

En particulier, pour $P,Q\in\mathbb{R}[X]$, on a $n^2P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et ainsi :

$$P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ est convergente donc, par comparaisons, la série $\sum P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$ est absolument convergente donc convergente. On en déduit que $\varphi(P,Q)$ est bien défini et à valeurs réelles puisque c'est la somme d'une série convergente à termes réels ❶. Pour $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P_1 + P_2, Q) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda P_1(n) + P_2(n))Q(n)\mathrm{e}^{-n} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} P_1(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} P_2(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n} \text{ (car les deux séries sont convergentes)} \\ &= \lambda\varphi(P_1, Q) + \varphi(P_2, Q)\end{aligned}$$

donc φ est linéaire à gauche. De plus, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$\varphi(P,Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n} = \varphi(Q,P)$$

donc φ est symétrique ❸. Étant linéaire à gauche, elle est bilinéaire ❷. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$\varphi(P,P) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)^2\mathrm{e}^{-n} \geqslant 0 \text{ (car une somme de nombres positifs est positive)}$$

donc φ est positive ❹. Supposons maintenant $\varphi(P,P) = 0$, c'est à dire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)^2\mathrm{e}^{-n} = 0$$

Une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, tous les termes sont nuls, on en déduit donc que $P(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme P possède donc une infinité de racines et par conséquent P est le polynôme nul. L'application φ est donc définie-positive ❺. C'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. □

Remarque. Les résultats suivants sont d'un usage constant pour démontrer le caractère défini-positif :

- Si une somme de n termes positifs est nulle, alors chacun des termes est nul ;
- Si une fonction est continue, positive et d'intégrale nulle sur un intervalle I, alors cette fonction est identiquement nulle sur I ;
- Si un polynôme de degré inférieur à n possède au moins p racines, comptées avec multiplicité, et $p > n$, alors ce polynôme est nul ;
- Si un polynôme possède une infinité de racines distinctes, alors ce polynôme est nul. □

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2. Pour $f, g \in \mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$, on pose :

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathrm{C}([0,1], \mathbb{R})$.