

Rappels de notations. La notation $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes dont l'indéterminée est notée X (l'indéterminée peut parfois être désignée par une autre notation). La notation $\mathbb{K}_n[X]$ désigne l'ensemble de tous les polynômes P tels que $\deg P \leq n$ (attention à l'inégalité large, voir plus loin la définition du degré). En particulier, $\mathbb{K}_0[X]$ désigne l'ensemble des polynômes constants (on l'identifie en général à $\mathbb{K}$).

Les opérations. L'ensemble $\mathbb{K}[X]$ est muni d'un certain nombre d'opérations :

- Une somme et un produit par un scalaire qui en font un espace vectoriel et les $\mathbb{K}_n[X]$ en sont des sous-espaces vectoriels. On note que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie mais les $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie, $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.
- Il y a plus généralement une opération de produit de deux polynômes. Attention : pour $n \geq 1$, les $\mathbb{K}_n[X]$ ne sont pas stables par produit.
- On peut également effectuer la composée de deux polynômes.

Dérivation. Pour un polynôme P noté sous la forme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ on définit sa dérivée :

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

L'application $P \mapsto P'$ est linéaire et on a les formules usuelles concernant la dérivée d'un produit et d'une composée. On a également le résultat suivant :

$$P' = 0 \iff P \in \mathbb{K}_0[X]$$

Le degré. Pour un entier $d \geq 0$, on dit qu'un polynôme P est de degré d lorsqu'il s'écrit sous la forme :

$$P = a_d X^d + a_{d-1} X^{d-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

avec $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$ et $a_d \neq 0$. Par convention, on dit que le polynôme nul a pour degré $-\infty$. Le degré d'un polynôme P est noté $\deg(P)$. On a les propriétés suivantes, pour $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned} \deg(PQ) &= \deg(P) + \deg(Q) \\ \deg(P + Q) &\leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \end{aligned}$$

Si de plus $\deg P \neq \deg Q$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$. On a également l'inégalité :

$$\deg(P') \leq \deg(P) - 1$$

et si $\deg(P) \geq 1$ alors on a l'égalité $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

$\triangle$ En général $\deg(P + Q) \neq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

$\triangle$ En général, $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ne signifie pas que $\deg(P) = n$.

La division euclidienne. Pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$, il existe un unique couple (Q, R) d'éléments de $\mathbb{K}[X]$ tels que :

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

Noter la condition sur R sans laquelle on n'a pas l'unicité.

Les racines. On dit que $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$, ce qui est équivalent à $(X - \alpha) \mid P$. La multiplicité de cette racine est le plus grand entier $m \geq 1$ tel que $(X - \alpha)^m \mid P$. Par conséquent, α est une racine de multiplicité m de P lorsqu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X - \alpha)^m Q \quad \text{et} \quad Q(\alpha) \neq 0$$

Si on sait seulement que $m \geq 1$ et $(X - \alpha)^m \mid P$, on dit que α est racine de P de multiplicité au moins m . On a le résultat :

$$\alpha \text{ est racine de multiplicité } m \text{ de } P \iff P(\alpha) = P'(\alpha) = \dots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Polynôme scindé. Un polynôme (non nul) P est scindé sur $\mathbb{K}$ lorsqu'il peut se factoriser complètement et s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i}$$

avec $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ qui sont les racines de P , $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives et $\lambda \in \mathbb{K}$ qui est le coefficient dominant de P . Tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés. Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont toujours scindés sur $\mathbb{C}$ (ce qui signifie qu'ils peuvent être complètement factorisés sous la forme ci-dessus en acceptant éventuellement d'utiliser leurs racines complexes).

Somme et produit des racines. Considérons un polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ factorisé sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - \alpha_i)$$

En développant ce produit et en identifiant les coefficients, on obtient $\lambda = a_n$ puis :

$$\lambda(-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n = a_0 \quad \text{et} \quad -\lambda(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) = a_{n-1}$$

Polynôme non scindé. Si un polynôme (non nul) $P \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé, cela signifie qu'il possède des racines complexes non réelles et il apparaît alors des facteurs de degré 2 et sans racines réelles (donc de discriminant strictement négatif) dans sa factorisation. Un tel polynôme peut donc s'écrire sous la forme :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r (X - \alpha_i)^{m_i} \times \prod_{k=1}^s (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)$$

avec λ le coefficient dominant de P , $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines réelles deux à deux distinctes de P et $m_1, \dots, m_r$ leurs multiplicités respectives et $\beta_1, \dots, \beta_s, \gamma_1, \dots, \gamma_s$ des réels tels que pour tout $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$, $\beta_i^2 - 4\gamma_i < 0$.