Les notations de l'algèbre linéaire

◇ Avant tout, un rappel des objets manipulés en algèbre linéaire.

- Les espaces vectoriels : ce sont des ensembles dont les éléments sont appelés vecteurs. On peut réaliser des opérations sur ces vecteurs (somme, produit par un scalaire et, plus généralement, combinaisons linéaires). Les sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel sont eux-mêmes des espaces vectoriels.
- Les vecteurs : ce sont les éléments d'un espace vectoriel.
- Les applications linéaires : ce sont des applications d'un espace vectoriel E dans un autre.
- Les matrices.
- Les familles de vecteurs. Il s'agit toujours de familles d'éléments d'un même espace vectoriel E, en général ce sont des familles finies.

⚠ Écrire une égalité entre des objets de types différents (par exemple entre une application linéaire et un sous-espace vectoriel) n'a *aucun sens* et est généralement signe d'une confusion qu'il faut identifier et éviter.

La notation Vect**.** Si $u_1, \dots, u_n$ sont des éléments d'un espace vectoriel E, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ désigne le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \dots, u_n$ ou, de manière équivalente, l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $u_1, \dots, u_n$. Par conséquent, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Écrire $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ signifie que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E.

La notation dim**.** Elle ne peut s'appliquer qu'à un espace vectoriel (et donc à un sous-espace vectoriel) et il faut que cet espace soit de dimension finie. Si E est un espace de dimension finie, $\dim E$ représente la dimension de E, c'est à dire le nombre de vecteurs dans n'importe quelle base de E.

⚠ La notation dim appliquée à autre chose qu'un espace vectoriel (application linéaire, famille de vecteurs, matrice, etc.) n'a *aucun sens*.

Les notations Ker **et** Im**.**

- Appliquées à une application linéaire $f : E \to F$, elles sont définies par :

$$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\, f = \{y \in F \mid \exists x \in E,\ y = f(x)\}$$

  En particulier, $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.

- Appliquées à une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\operatorname{Ker} M$ et $\operatorname{Im} M$ désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à M. En particulier, $\operatorname{Ker} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$ et $\operatorname{Im} M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. On a également :

$$\operatorname{Ker} M = \{x \in \mathbb{K}^p \mid Mx = 0\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} M = \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

avec $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de M.

La notation rg. C'est l'une de celles qui possède le plus de significations distinctes.

- Si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, alors par définition

$$\operatorname{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim \operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_n)$$

⚠ Rappelons que $\dim(u_1, \dots, u_n)$ n'a *aucun sens*. On peut être amenés à parler du *nombre d'éléments* de la famille $(u_1, \dots, u_n)$, on utilise pour cela la notation $\operatorname{card}(u_1, \dots, u_n)$ (qui vaut n ici).

- Si $f : E \to F$ est une application linéaire et $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie, alors $\operatorname{rg} f$ désigne la dimension de $\operatorname{Im} f$.
- Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg} M$ désigne le rang de l'application linéaire canoniquement associée à M ou encore de manière équivalente :

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(C_1, \dots, C_p)$$

avec $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$ les colonnes de M.

La notation +.

- Si x et y sont deux éléments d'un même espace vectoriel E, $x + y$ est leur somme, c'est un élément de E.
- Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F, alors $f + g$ est l'application :

$$f + g : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

Ainsi, $f + g$ est également une application linéaire de E dans F.

- Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F + G$ est défini par :

$$F + G = \{x + y \mid x \in F \text{ et } y \in G\} = \{x \in E \mid \exists x' \in F,\ \exists x'' \in G,\ x = x' + x''\}$$

Ainsi, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- La notation + a également un sens lorsqu'elle désigne la somme de deux matrices de même taille.

⚠ La notation + s'applique à des éléments de même type (vecteur, application, sous-espace, etc.) et représente un élément du même type également. Il y a cependant une exception; si x est un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E, alors $x + F$ désigne l'ensemble :

$$x + F = \{x + y \mid y \in F\}$$

C'est un sous-ensemble de E mais ce n'est en général pas un sous-espace vectoriel de E. Cette notation est utilisée pour décrire des ensembles de solutions d'équations linéaires.

La notation ⊕. Elle ne s'applique qu'à deux sous-espaces vectoriels F et G d'un même espace vectoriel E. La notation $F \oplus G$ représente la somme $F + G$ et signale également que cette somme est directe. L'utilisation la plus fréquente est l'écriture $E = F \oplus G$ qui signifie que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.