Lois de probabilités finies

La loi uniforme. C'est la loi qui correspond à un tirage « au hasard » d'un élément parmi n. Plus précisément, une variable aléatoire finie X suit une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (notation : $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$) lorsque :

- X prend ses valeurs dans $[\![1,n]\!]$;
- Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=i) = \dfrac{1}{n}$.

On a alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$.
Situation type : on considère une urne qui contient n boules numérotées de 1 à n. On tire une boule au hasard et on note X le numéro de la boule obtenue, alors $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.

La loi de Bernoulli. C'est la loi qui représente les expériences aléatoires qui n'ont que deux issues possibles (*succès* et *échec*), la probabilité de succès étant p. Plus précisément une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$) lorsque :

- X prend ses valeurs dans $\{0,1\}$;
- $\mathbf{P}(X=1) = p$ et $\mathbf{P}(X=0) = 1-p$.

On a alors $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{V}(X) = p(1-p)$.
Situation type : on considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0,1[$. On lance la pièce et on pose $X=1$ si elle tombe sur *pile* et $X=0$ sinon, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

La loi binomiale. C'est la loi qui correspond au nombre de succès lorsque l'on réalise n expériences indépendantes et que pour chacune d'elles la probabilité de succès est p. Plus précisément, une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ (notation : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$) lorsque :

- X prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$;
- Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathbf{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

On a alors $\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{V}(X) = np(1-p)$.
Situation type : on considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0,1[$. On lance n fois cette pièce et on note X le nombre de fois où le résultat est *pile*, alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

Remarque. La loi $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. □

Somme de variables aléatoires suivant la loi binomiale. On considère une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir *pile* est $p \in]0,1[$. Considérons les deux expériences suivantes :

- On lance n fois la pièce, on note X_1 le nombre de fois où l'on obtient *pile*, on lance m fois la pièce, on note X_2 le nombre de fois où l'on obtient *pile* puis on pose $X = X_1 + X_2$;
- On lance $n+m$ fois la pièce et on note X le nombre de fois où l'on obtient *pile*.

Dans le cas de la première expérience, on a $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$. Pour la deuxième, on a $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$. Du point de vue de la variable aléatoire X obtenue, ces deux expériences sont les mêmes ce qui permet de se convaincre du résultat suivant :

si $X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ (et X_1 et X_2 sont indépendantes), alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathscr{B}(n+m,p)$

(attention : le paramètre p doit être le même pour les deux lois binomiales). En tenant compte du fait que la loi $\mathscr{B}(p)$ est la loi $\mathscr{B}(1,p)$:

si $X_1,\dots,X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ (et $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes), alors $X_1+\cdots+X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$