Noyau et image

◇ E et F sont des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ est linéaire.

Que désigne $\text{Ker } f$? Comment déterminer $\text{Ker } f$? Le noyau de f (noté $\text{Ker } f$) est l'ensemble des éléments x de E tels que $f(x) = 0_F$; c'est un sous-espace vectoriel de E . Déterminer $\text{Ker } f$ revient ainsi à résoudre l'équation $f(x) = 0_F$. Il faut donc garder à l'esprit l'équivalence (pour $x \in E$) :

$$x \in \text{Ker } f \iff f(x) = 0_F$$

Quel est le lien entre $\text{Ker } f$ et l'injectivité de f ? L'application f est injective si, et seulement si, $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

△ Comme $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E , il n'est *jamais vide* car il contient toujours au moins 0_E . L'application f est injective si, et seulement si, $\text{Ker } f$ est *réduit à* $\{0_E\}$.

Quel est le lien entre $\text{Ker } f$ et les équations linéaires? Considérons une équation linéaire, c'est à dire une équation de la forme $f(x) = b$ avec $b \in F$ et dont l'inconnue est $x \in E$. Si on connaît une solution particulière x_0 de cette équation alors pour $x \in E$:

$$f(x) = b \iff f(x) = f(x_0) \iff f(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \text{Ker } f$$

Les solutions de l'équation $f(x) = b$ sont donc les éléments de E qui s'écrivent comme somme de x_0 et d'un élément de $\text{Ker } f$.

Que désigne $\text{Im } f$? Comment déterminer $\text{Im } f$? L'image de f est l'ensemble des éléments y de F qui possèdent un antécédant par f ; c'est un sous-espace vectoriel de F . On a donc :

$$\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, f(x) = y\}$$

Il faut garder à l'esprit l'équivalence (pour $y \in F$) :

$$y \in \text{Im } f \iff \exists x \in E, y = f(x)$$

Pour déterminer $\text{Im } f$, on utilise souvent le résultat suivant : si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } f$. On peut également utiliser les informations fournies par le théorème du rang : si E est de dimension finie, alors $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = \dim E$.

Quel est le lien entre $\text{Im } f$ et la surjectivité de f ? L'application f est surjective si, et seulement si, $\text{Im } f = F$.

△ De manière générale, si on dispose d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$, il n'y a aucune raison pour que $\text{Im } f = F$. C'est le cas si, et seulement si, f est surjective.

Quel est le lien entre $\text{Im } f$ et les équations linéaires ? L'équation linéaire $f(x) = b$ (avec $b \in F$, l'inconnue est $x \in E$) possède des solutions si, et seulement si, $b \in \text{Im } f$.

Comment déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ lorsque f est définie par sa matrice dans une base ? Considérons par exemple le cas où E est un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de E et f est l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = M$ avec :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$, on a :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On voit donc apparaître le sous-espace vectoriel $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il faut prendre garde au fait qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$ et pas de E . Par conséquent, ce sous-espace n'est pas le noyau de f . Par contre on a :

$$\text{Ker } M = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir $\text{Ker } f$, il faut « convertir » le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en un vecteur de E ; il s'agit du vecteur dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, 1, 0)$ c'est à dire le vecteur $e_1 + e_2$. Ainsi :

$$\text{Ker } f = \text{Vect}(e_1 + e_2)$$

De plus, la famille $(e_1 + e_2)$ est libre (constitué d'un seul vecteur non nul), c'est donc une base de $\text{Ker } f$. Les colonnes de la matrice M engendrent le sous-espace vectoriel $\text{Im } M$:

$$\text{Im } M = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

À nouveau il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^3$. Les vecteurs de E dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont respectivement $e_1 - e_2$ et e_3 de sorte que :

$$\text{Im } f = \text{Vect}(e_1 - e_2, e_3)$$

La famille $(e_1 - e_2, e_3)$ est libre (constituée de deux vecteurs non colinéaires), c'est donc une base de $\text{Im } f$.