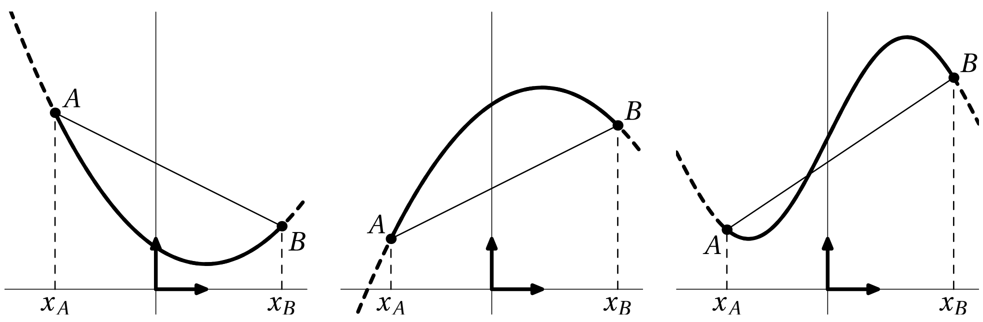
Fonctions convexes

◇ On note I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide et non réduit à un point.

Qu'est-ce qu'une fonction convexe ? Graphiquement, c'est une fonction dont la représentation graphique est telle que, pour deux points A et B quelconques situés sur la courbe représentative de f, la partie de courbe située entre A et B est en dessous du segment $[AB]$.
Lorsque l'inégalité est inversée (pour deux points A et B sur la courbe représentative de f, la partie de la courbe située entre A et B est située au dessus du segment $[AB]$), on dit que la fonction est concave.
On peut noter que f est concave si, et seulement si, $-f$ est convexe.
Une fonction peut n'être ni concave ni convexe.
La définition formelle d'une fonction convexe à rappelée à la fin de cette fiche.



Convexe — Concave — Ni convexe ni concave

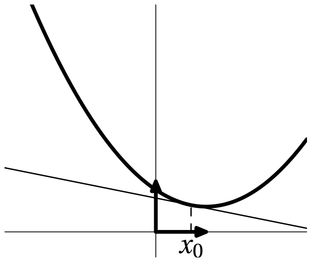
Comment démontrer qu'une fonction est convexe ? On n'utilise en général pas directement la définition d'une fonction convexe. En pratique, pour montrer qu'une fonction est convexe, on utilise le plus souvent le résultat suivant :
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable sur I et f'' est positive sur I, alors f est convexe sur I.

À quoi servent les fonctions convexes ? En mathématiques et en classes préparatoires, elles servent essentiellement à établir des inégalités. À un niveau plus avancé, elles interviennent dans des problèmes de minimisation.

Comment établir des inégalités à partir de la convexité ?

• La courbe représentative d'une fonction convexe est située au dessus de ses tangentes. Plus précisément, si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et convexe et $x_0 \in I$, alors :

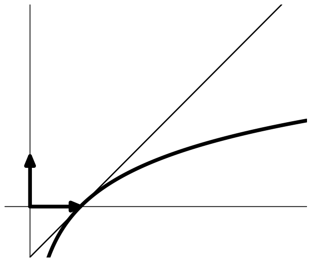
$$\forall x \in I,\ f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$



De même, la courbe représentative d'une fonction concave est située en dessous de ses tangentes.

Exemple. La fonction $f : x > 0 \mapsto \ln x$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} \leqslant 0$$



La fonction f est donc concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est la droite d'équation :

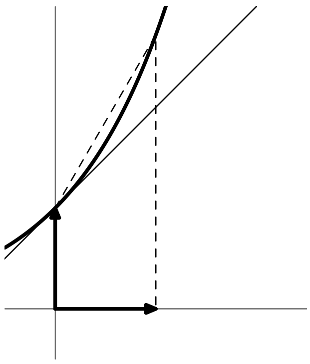
$$y = f(1) + (x - 1) f'(1)$$
$$y = x - 1$$

On a donc : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(1 + x) \leqslant x - 1$.

• On peut obtenir des inégalités en utilisant la position de la courbe par rapport aux segments.

Exemple. La fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x$ est deux fois dérivable et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = \mathrm{e}^x \geqslant 0$$



La fonction f est donc convexe sur $\mathbb{R}$. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est la droite d'équation :

$$y = f(0) + x f'(0)$$
$$y = 1 + x$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$. La droite joignant les points d'abscisse 0 et 1 sur la courbe représentative de f a pour coefficient directeur :

$$a = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \mathrm{e}^1 - 1$$

elle a donc pour équation :

$$y = f(0) + a x$$
$$y = 1 + (\mathrm{e}^1 - 1) x$$

On a donc : $\forall x \in [0,1]$, $\mathrm{e}^x \leqslant 1 + (e^1 - 1)x$.

Définition formelle d'une fonction convexe. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe lorsque :

$$\forall x, y \in I,\ \forall \lambda \in [0,1],\ f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$$