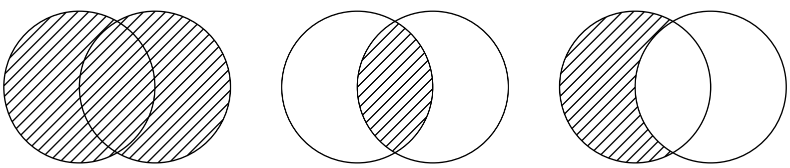
Les ensembles

Quelles sont les opérations usuelles sur les ensembles ? Pour deux ensembles A et B :

- $A \cup B$ est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A **ou** à B :
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$
(noter que $A \cup B$ contient les éléments de A **et** les éléments de B ce qui prête parfois à confusion) ;
- $A \cap B$ est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à la fois à A **et** à B :
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$$
- $A \setminus B$ est l'ensemble constitué des éléments qui appartiennent à A et qui n'appartiennent pas à B :
$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$$
$A \setminus B$ est aussi noté $A - B$.

Illustration graphique : le cercle de gauche délimite l'ensemble A, celui de droite l'ensemble B. Les parties hachurées correspondent respectivement à $A \cup B$, $A \cap B$ et $A \setminus B$.



$A \cup B$ $\quad$ $A \cap B$ $\quad$ $A \setminus B$

Comment montrer que $A \subset B$? Si A et B sont deux ensembles, $A \subset B$ signifie que A que tout élément de A appartient également à B. Pour montrer que $A \subset B$, on considère $x \in A$ et on démontre que $x \in B$.

Exemple. Démontrer que $A \subset B$ avec $A = \text{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $B = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$.

→ **Soit** $u \in A$, il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\-\lambda\\0\end{pmatrix}$. On note $u = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, alors $x = \lambda$, $y = -\lambda$ et $z = 0$ donc $x + y + z = 0$. **On en déduit que** $u \in B$**.** Ceci montre que $A \subset B$. □

Comment montrer l'égalité de deux ensembles ? On a l'équivalence :

$$A = B \iff (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Pour montrer que $A = B$, on montre alors que $A \subset B$ et $B \subset A$ (on dit que l'on proccède par double inclusion).

Exemple. Démontrer que $F = G$ avec $F = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid (X-1) \mid P\}$.
→ Soit $P \in F$. On réalise la division euclidienne de P par $(X-1)$: il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)Q(X) + R(X)$ et $\deg R < \deg(X-1)$. Comme $\deg(X-1) = 0$, on a $\deg R \leqslant 0$ donc le polynôme R est constant. En substituant 1 à X, on obtient $P(1) = 0 = R(1)$ donc le polynôme R est constant égal à 0 donc $R = 0$ et ainsi $P = (X-1)Q$. Par conséquent, $(X-1) \mid P$ donc $P \in G$ et ceci montre que $F \subset G$. Réciproquement, soit $P \in G$, il existe alors $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)Q(X)$. En substituant 1 à X, il vient $P(1) = 0$ donc $P \in F$. Ceci montre que $G \subset F$ et on en déduit finalement que $F = G$. $\square$

Remarque. On peut parfois démontrer l'égalité entre deux ensembles en raisonnant par équivalences :

$$x \in A \iff \cdots \iff x \in B$$ $\square$

Exemple. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \mapsto & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix} \end{array}$. Démontrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
→ Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z-x \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ y = z \\ z = x \end{array} \right. \iff x = y = z \\ \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et par conséquent $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\square$

Remarque. Si F est G sont des sous-espaces vectoriels d'un espace E de dimension finie, $F \subset G$ et $\dim F = \dim G$, alors $F = G$. On dit dans ce cas que l'on montre l'égalité de F et G par un argument de dimension. $\square$

Exemple. Démontrer que $F = G$ avec $F = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $G = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
→ Soit $u \in G$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $u = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$u = \alpha\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + \beta\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (\alpha + \beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2\alpha - \beta)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $u \in F$. Ceci montre que $G \subset F$. De plus, F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ engendrés par deux vecteurs non colinéaires, donc $\dim F = \dim G = 2$. On en déduit que $F = G$. $\square$