# Notion de dimension

⚠ Attention aux confusions :

- La notion de dimension n'a de sens que pour un espace vectoriel (de dimension finie), donc également pour un sous-espace vectoriel d'un espace de dimension finie ;
- On ne peut donc pas parler de la dimension d'une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$, en revanche :
  - — on peut parler du nombre d'éléments de la famille $(u_1, \dots, u_p)$ : il est égal à $p$ et on note aussi $p = \operatorname{card}(u_1, \dots, u_p)$,
  - — on peut parler de la dimension du sous-espace engendré $\operatorname{Vect}(u_1, \dots, u_p)$ et cette dimension s'appelle le rang de $(u_1, \dots, u_p)$ ;
- Pour une matrice, on parlera de sa taille (nombre de lignes, nombre de colonnes) ou de son rang.

⚠ Insistons encore :

- Pour une famille de vecteurs $(u_1, \dots, u_p)$, la notation $\dim(u_1, \dots, u_p)$ **n'a aucun sens** car on ne sait pas si on parle du nombre d'éléments de la famille ou de la dimension de l'espace engendré par cette famille ;
- Pour une matrice $M$, la notation $\dim(M)$ **n'a aucun sens** car on ne sait pas si on parle du nombre de lignes de $M$, du nombre de colonnes (ou même du nombre de coefficients).

⚠ Insistons encore une fois : à chaque fois que l'on emploie la notation dim, ce qui vient ensuite ne peut-être qu'un espace vectoriel (et de dimension finie).

◇ Dans la suite, $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

**Qu'est-ce que la dimension de $E$ ?** Si $E$ possède des bases, alors elles ont toutes le même nombre d'éléments et ce nombre est appelé dimension de $E$. Dans le cas contraire, on dit que $E$ n'est pas de dimension finie.

**Comment « comprendre » la dimension de $E$ ?** C'est le nombre de scalaires qu'il faut pour déterminer complètement un élément de $E$.

***Exemples.***

- $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ est de dimension 3 ;
- $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}$ est de dimension 2 car pour décrire un élément de $E$, il suffit de connaitre $x$ et $y$ puisque $z = -(x + y)$. □

**Comment utiliser la dimension ?** On donne ici quelques applications.

**Théorème 1 – Égalité de deux sous-espaces**

*Si $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ et $E$ est de dimension finie, alors :*

$$F = G \iff (F \subset G \text{ et } \dim F = \dim G)$$

**Théorème 2 – Deux espaces isomorphes ont même dimension**

*Si $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f : E \to F$ est un isomorphisme et $E$ est de dimension finie, alors $F$ est de dimension finie et* $\dim F = \dim E$.

**Théorème 3 – Caractérisation des isomorphismes**

*Si $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $E$ et $F$ sont de dimension finie et* $\dim F = \dim E$, *alors on a équivalence entre :*

*(i)* *$f$ est un isomorphisme ;*
*(ii)* *$f$ est injective ;*
*(iii)* *$f$ est surjective.*

**Théorème 4 – Existence d'un isomorphisme**

*Si $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $E$ et $F$ sont de dimension finie et* $\dim E = \dim F$, *alors il existe un isomorphisme $f : E \to F$.*

**Théorème 5 – Caractérisation des sous-espaces supplémentaires**

*Si $E$ est de dimension finie et $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$, alors on a équivalence entre :*

*(i)* $E = F \oplus G$ ;
*(ii)* $F \cap G = \{0\}$ *et* $\dim F + \dim G = \dim E$.

---

**Comment déterminer $\dim E$ ?** Quelques possibilités :

- Si $f : E \to F$ est un isomorphisme et $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimenson finie, alors $\dim E = \dim F$ ;
- Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ (*i.e.* une famille libre et génératrice de $E$), alors $\dim E = \operatorname{card} \mathscr{B} = n$ ;
- Si $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$ de dimension finie et $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

***Remarque.*** On peut être amené à utiliser la relation suivante (formule de Grassman) : si $F$ et $G$ sont deux sous-espaces vectoriels de $E$ et $E$ est de dimension finie, alors

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$ □

**Application à l'étude de $\operatorname{Im} f$.** Supposons que $E$ est de dimension finie, $F$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f : E \to F$ est linéaire. Supposons de plus que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de $E$ et $p = \dim \operatorname{Ker} f$. Alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$ et $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rg} f = n - p$ (théorème du rang). Conséquence : si on arrive à trouver $n - p$ vecteurs parmi $f(e_1), \dots, f(e_n)$ qui constituent une famille libre, alors cette famille est une base de $\operatorname{Im} f$.