Déterminants

Comment utiliser les déterminants ? On utilise des déterminants dans les cas suivants :

- Déterminer si une famille est une base ;
- Déterminer si un endomorphisme est bijectif ;
- Pour un endomorphisme f, déterminer si le noyau $\operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id})$ est réduit à $\{0\}$;
- Déterminer si une matrice carrée est inversible.

Également :

- Savoir si un système (linéaire, carré) admet une unique solution ;
- Savoir si un système (linéaire, carré) homogène admet une solution non triviale.

Les propriétés du déterminant matriciel. Retenir les résultats suivants :

- Pour $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, $\det(\mathrm{I}_n) = 1$;
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det(A) \neq 0$ et, lorsque c'est le cas, $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$.

Le lien entre opérations élémentaires et déterminant. Les opérations suivantes permettent souvent de simplifier des calculs de déterminants :

- Si on échange deux lignes (respectivement deux colonnes) dans un calcul de déterminant, alors le déterminant est changé en son opposé ;
- Si on ajoute à une ligne (respectivement une colonne) une combinaison linéaire des *autres*, alors le déterminant ne change pas ;
- Si on multiplie une ligne (respectivement une colonne) par un scalaire λ, alors le déterminant est multiplié par λ.

Comment calculer le déterminant d'une matrice ? Quelques méthodes qui peuvent s'appliquer :

- Développer par rapport à une ligne ou une colonne. Par exemple le développement d'un déterminant 3×3 par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \ominus \begin{vmatrix} a & b & c \\ \boxed{a'} & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & \boxed{b'} & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \ominus \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & \boxed{c'} \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= -a' \begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix}$$

$$= -a'(bc'' - cb'') + b'(ac'' - ca'') - c'(ab'' - ba'')$$

ou par rapport à la troisième colonne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix} &= \oplus\begin{vmatrix} a & b & \boxed{c}\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix} \ominus \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & \boxed{c'}\\ a'' & b'' & c''\end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & \boxed{c''}\end{vmatrix}\\ &= c\begin{vmatrix} a' & b'\\ a'' & b''\end{vmatrix} - c'\begin{vmatrix} a & b\\ a'' & b''\end{vmatrix} + c''\begin{vmatrix} a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}\\ &= c(a'b''-b'a'')-c'(ab''-ba'')+c''(ab'-ba')\end{aligned}$$

On choisit en général une ligne ou une colonne contenant un maximum de 0 pour faciliter le calcul et, au besoin, on peut en faire apparaitre en réalisant des opérations sur les lignes ou les colonnes;

- Si tous les coefficients d'une ligne (ou d'une colonne) sont les mêmes, on peut faire apparaitre des zéros dans cette ligne (colonne) en utilisant des opérations élémentaires;
- Si la somme des coefficients de chaque ligne (ou colonne) est constante, on peut ajouter à l'une des lignes (colonnes) toutes les autres pour se ramener au cas précédent;
- Dans le cas d'un déterminant de taille n, faire apparaitre une relation de récurrence d'ordre 1 ou 2;
- Dans le cas d'un déterminant $\Delta(x)$ connu lorsque $x \neq x_0$, on peut obtenir $\Delta(x_0)$ en faisant tendre x vers x_0 et en invoquant une propriété de continuité;
- En particulier, dans le cas d'un déterminant $\Delta(a,b)$ connu lorsque $a \neq b$, on peut obtenir $\Delta(a,a)$ en faisant tendre b vers a et en invoquant une propriété de continuité;
- Il peut être intéressant de noter que le déterminant d'une matrice M est le déterminant des ses vecteurs colonne dans la base canonique;
- Un déterminant de la forme :

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \cdots & a_{1n}+x\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}+x & \cdots & a_{nn}+x\end{vmatrix}$$

est une fonction affine de x, il suffit donc de connaitre $\Delta(x)$ pour deux valeurs distinctes de x pour connaitre sa valeur pour tout x.

À propos du déterminant d'une famille de vecteurs. Quelques points à retenir :

- Le déterminant d'une famille de vecteurs n'a de sens que pour une famille de n vecteurs d'un espace de dimension n et ce déterminant est relatif au choix d'une base $\mathscr{B}$ de E;
- La quantité $\det_{\mathscr{B}}(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$ se développe « comme un produit »;
- Si deux vecteurs parmi $x_1,\dots,x_n$ sont égaux, alors $\det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)=0$.

À propos du déterminant d'un endomorphisme. Quelques points à retenir :

- Le déterminant d'une application linéaire f n'est définie que si f est un *endomorphisme* d'un espace vectoriel *E de dimension finie*;
- Si $\mathscr{B}$ est une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ mais ce résultat ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie;
- Pour $f,g \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\det(fg)=\det(f)\det(g)$, $\det(\lambda f)=\lambda^n\det(f)$, $\det(\mathrm{id}_E)=1$;
- Un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijectif si, et seulement si, $\det(f)\neq 0$ et, lorsque c'est le cas, $\det(f^{-1})=(\det(f))^{-1}$.