Les théorèmes essentiels sur la continuité et la dérivation

I. Continuité

⚠ Ces résultats concernent des fonctions à valeurs réelles et définies sur un intervalle.

◇ Il y a trois manières d'énoncer le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Théorème 1 – TVI première formulation

Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur I, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème 2 – TVI deuxième formulation

Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si :
- *f est continue sur I ;*
- *a et b sont des éléments de I ;*
- *c est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$,*

alors il existe x compris entre a et b tel que $f(x) = c$.

Théorème 3 – TVI troisième formulation

Soient I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si :
- *f est continue sur I ;*
- *a et b sont des éléments de I ;*
- *$f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires,*

alors il existe x compris entre a et b tel que $f(x) = 0$.

◇ Rappel : un segment de $\mathbb{R}$ est un intervalle $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leqslant b$.

Théorème 4 – Image d'un segment par une fonction continue

Si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f([a, b])$ est un segment de $\mathbb{R}$. Si on note $f([a, b]) = [m, M]$ alors m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$.

Corollaire 5 – Fonction continue sur un segment bornée

Toute fonction définie et continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 6 – Bijection, continuité de la réciproque

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone, alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et sa réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone (de même sens que f).

II. Dérivation

⚠ Ces résultats concernent des fonctions à valeurs réelles et définies sur un intervalle.

Théorème 7 – Rolle

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si :

- *f est continue sur $[a,b]$;*
- *f est dérivable sur $]a,b[$;*
- *$f(a) = f(b)$,*

alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème 8 – Égalité des accroissements finis

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si :

- *f est continue sur $[a,b]$;*
- *f est dérivable sur $]a,b[$,*

alors il existe $c \in\,]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Théorème 9 – Inégalité des accroissements finis, première forme

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Si :

- *f est continue sur $[a,b]$;*
- *f est dérivable sur $]a,b[$;*
- *il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in [a,b]$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$,*

alors $m \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$.

Théorème 10 – Inégalité des accroissements finis, deuxième forme

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si :

- *f est dérivable sur I ;*
- *il existe $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$,*

alors, quels que soient $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.

⋄ La deuxième forme de l'inégalité des accroissements finis reste valable pour des fonctions à valeurs complexes.

Théorème 11 – Inégalité des accroissements finis, fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$. Si :

- *f est dérivable sur I ;*
- *il existe $k \geqslant 0$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$,*

alors, quels que soient $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$.