Analyse asymptotique

◇ On traite principalement (mais pas uniquement) le cas des suites.

I. Obtenir un équivalent

◇ Les équivalents usuels :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad \cos(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}; \quad \exp(x)-1 \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x; \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$$

(α indépendant de x). Les opérations autorisées :

- Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n v_n \sim w_n t_n$ (produit) ;
- Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n / v_n \sim w_n / t_n$ (quotient) ;
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n > 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang et quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (indépendant de n), $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

On peut aussi utiliser : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ avec ℓ une limite finie et non nulle, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

Exercice 1. Équivalent de $u_n = e^{1/n} \dfrac{\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right)^2}{n\ln(n)}$.

⚠ On ne peut pas faire de sommes d'équivalents :

$$u_n \sim w_n \text{ et } v_n \sim t_n \not\Longrightarrow u_n + v_n \sim w_n + t_n$$

Plusieurs possibilités dans ce cas :

- Revenir à la définition, rappelons que :

$$u_n \sim v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par exemple, on considère $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$. On sait que $\sqrt{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$ et $\sqrt{n+2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$. On *imagine* donc que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On ne peut cependant pas l'affirmer directement car aucun résultat du cours ne permet de faire de somme d'équivalents. On considère le quotient :

$$\frac{u_n}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\Bigg(\underbrace{\sqrt{\frac{n+1}{n}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1} + \underbrace{\sqrt{\frac{n+2}{2}}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1}\Bigg) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Ainsi $\dfrac{u_n}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, donc par définition $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$;

- Déterminer quel est le terme prépondérant dans la somme. Par exemple, sachant que $\ln(n) = \mathrm{o}(n)$, on a $n+\ln(n) = n+\mathrm{o}(n)$ et on en déduit que $n+\ln(n) \sim n$;
- Traduire $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$ avec $u_n = w_n + \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = t_n + \mathrm{o}(t_n)$ puis faire la somme :

$$\sin\frac{2}{n} + \sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{3}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{3}{n}$$

◇ Il est important de noter que : $u_n \sim v_n \Leftrightarrow u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n) \Leftrightarrow u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.

II. Obtenir un développement asymptotique

◇ Les relations usuelles de négligeabilité :

- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, alors $(\ln n)^\alpha = \mathrm{o}(n^\beta)$;
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$, alors $n^\alpha = \mathrm{o}(\mathrm{e}^{\beta n})$;
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 1$, alors $n^\alpha = \mathrm{o}(a^n)$;
- Si $a \in \mathbb{R}$, alors $a^n = \mathrm{o}(n!)$.

Les opérations autorisées :

- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n + v_n = \mathrm{o}(w_n)$;
- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(t_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{o}(w_n t_n)$;
- Si $u_n = \mathrm{o}(w_n)$, alors $u_n v_n = \mathrm{o}(v_n w_n)$;
- On a les mêmes résultats en remplaçant o par O.

On peut aussi utiliser : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $u_n = \mathrm{o}(1)$ (réciproque vraie).

Exercice 2. Déterminer un développement asymptotique de $\sqrt{x}\ln(1+x)$ lorsque $x \to +\infty$.

◇ On peut aussi revenir à la définition : $u_n = \mathrm{o}(v_n) \Leftrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple. On considère $f(x) = \exp(-1/x^2)$. On imagine que $f(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$. Pour le justifier, on considère le quotient :

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) = u\exp(-u)$$

en posant $u = 1/x^2$. On a ainsi $u \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$, par croissances comparées $u\exp(-u) \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$, donc par composition des limites : $f(x)/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et par définition $f(x) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$. □

III. Quelques points supplémentaires

◇ Les résultats sur la relation O :

- Pour les opérations, les résultats sont les mêmes que pour o ;
- $u_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}(v_n) \Leftrightarrow \left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée ;
- Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ (réciproque fausse) ;
- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ (réciproque fausse) ;
- Si (u_n) est bornée, alors $u_n = \mathrm{O}(1)$ (réciproque vraie).

◇ Il faut toujours simplifier au maximum une comparaison. Pour cela, on utilise les résultats suivants :

- Simplifier un équivalent : si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$;
- Simplifier un o : si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$;
- Simplifier un O : si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n = \mathrm{O}(w_n)$.