Applications linéaires

$\diamond$ E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Comment démontrer que f est une application linéaire de E dans F ? Il y a trois points à établir :

❶ f est bien définie sur E (c'est à dire : pour tout $x \in E$, $f(x)$ est bien défini) ;

❷ f est à valeurs dans F (c'est à dire : pour tout $x \in E$, $f(x) \in F$) ;

❸ f est linéaire (c'est à dire : quels que soient $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$).

On donne ci-dessous trois exemples illustrant les difficultés que l'on peut rencontrer pour établir ces trois points.

Exemple. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = (X^2+1)P' - nXP$$

Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
→ Rappelons qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$. Il est clair que $f(P)$ est bien défini quel que soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ❶. Soient $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= (X^2+1)(\lambda P + Q)' - nX(\lambda P + Q) = \lambda(X^2+1)P' - \lambda nXP + (X^2+1)Q' - nXQ \\ &= \lambda f(P) + f(Q) \end{aligned}$$

Par conséquent, f est linéaire ❸. La difficulté réside ici dans la démonstration du fait que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ce n'est pas complètement évident car pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\deg P \leqslant n$, $\deg P' \leqslant n-1$ et ainsi $(X^2+1)P'$ et nXP sont de degré au plus $n+1$. On a donc *a priori* $\deg f(P) \leqslant n+1$ et $f(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. Pour démontrer que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ (c'est à dire $\deg f(P) \leqslant n$), il faut regarder plus en détails. On note pour cela :

$$P = aX^n + Q$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On a alors :

$$f(P) = a((X^2+1)nX^{n-1} - nX^{n+1}) + ((X^2+1)Q' - nXQ) = anX^{n-1} + (X^2+1)Q' - nXQ$$

Or $\deg anX^{n-1} \leqslant n$, $\deg(XQ) \leqslant n$ car $\deg Q \leqslant n-1$ et $\deg((X^2+1)Q') \leqslant n$ car $\deg Q' \leqslant n-2$. Par conséquent $\deg f(P) \leqslant n$ et ceci montre que $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$ ❷. L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. □

Exemple. On note E l'ensemble des suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et qui possèdent une limite finie. Pour $(u_n)_{n\geqslant 0} \in E$, on définit :

$$f((u_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n}$$

Démontrer que f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
→ Rappelons que E est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (suites à valeurs réelles). La difficulté réside ici dans le fait de montrer que $f((u_n))$ est bien défini quelle que soit la suite $(u_n) \in E$. En effet, $f((u_n))$ est défini comme étant la somme d'une série et il faut donc établir sa convergence. On considère donc $(u_n) \in E$, comme (u_n) admet une limite finie, elle est bornée et ainsi :

$$\frac{u_n}{2^n} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

La série géométrique $\sum 1/2^n$ est convergente (car $0 \leqslant 1/2 < 1$), par comparaison la série $\sum u_n/2^n$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi, $f((u_n))$ est bien défini ❶ et appartient à $\mathbb{R}$ ❷ (somme d'une série convergente à termes réels). Soient $(u_n), (v_n) \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La suite $(\lambda u_n + v_n)$ a une limite finie et :

$$\begin{aligned} f((\lambda u_n + v_n)) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda u_n + v_n}{2^n} = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{2^n} \text{ (car les deux séries sont convergentes)} \\ &= \lambda f((u_n)) + f((v_n)) \end{aligned}$$

L'application f est linéaire ❸. Par conséquent, f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. □

Exemple. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$ avec $A \neq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de P par A. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
→ Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $f(P)$ est bien défini ❶ et $f(P) \in \mathbb{R}[X]$ ❷. La difficulté réside ici dans la démonstration de la linéarité car on n'a pas de formule « explicite » pour $f(P)$. Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On réalise les divisions euclidiennes de P et Q par A :

$$\begin{aligned} P &= AU + f(P) \\ Q &= AV + f(Q) \end{aligned}$$

avec $U, V \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg(f(P)) < \deg A$, $\deg(f(Q)) < \deg A$. On a alors :

$$\lambda P + Q = (\lambda U + V)A + (\lambda f(P) + f(Q)) \tag{$*$}$$

On a $\deg(\lambda f(P) + f(Q)) \leqslant \max(\deg(f(P)), \deg(f(Q))) < \deg A$. Par conséquent, l'écriture $(*)$ est la division euclidienne de $\lambda P + Q$ par A. Ainsi, le reste dans la division euclidienne de $\lambda P + Q$ par A et $\lambda f(P) + f(Q)$ et par conséquent $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$ ❸. L'application f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. □