DS 4 – Durée 4h – Samedi 14 décembre 2024 $\quad$ PC*

Les calculatrices sont interdites.

Pensez à laissez une marge sur les copies, au minimum 5 cm.

Problème I

Présentation générale
Dans ce problème, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note :

$$f^0 = \mathrm{id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille

$$\big(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\big)$$

soit une base de l'espace vectoriel E.
Ce problème est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie 1 Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = (4x - 2y, x + y)$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie 2 Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$$

4. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$.

5. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

6. L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie 3 Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$

7. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

9. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

10. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie 4 Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.
Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.
Soit $v \in E$. Comme $\mathscr{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

11. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

12. Montrer que le déterminant de la famille $\mathscr{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathscr{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\lambda_j - \lambda_i\right)$$

13. Conclure que h est cyclique si, et seulement si, il admet n valeurs propres distinctes.

Problème II

Si n et k sont deux entiers naturels, on note $\binom{n}{k}$ *le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*
On note E l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $[0,1]$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *et de classe* C^1.
On pose pour $f \in E$ *:*

$$\forall f \in E,\ \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

Partie 1 Norme et suite de fonctions

1. Démontrer que l'application $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{n} + \dfrac{n-1}{n}x^2 \end{array}$$

Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de la suite de fonctions (f_n) sur l'intervalle $[0,1]$.

Partie 2 Quelques calculs de sommes

Dans cette partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = nx$.

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$.

6. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(x-\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}$.

Partie 3 Majoration d'une somme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $x \in [0,1]$*. Le but de cette partie est de majorer la somme*

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

On note

- *V l'ensemble des entiers* $k \in \{0,\dots,n\}$ *tels que* $\left|x-\dfrac{k}{n}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *;*
- *W l'ensemble des entiers* $k \in \{0,\dots,n\}$ *tels que* $\left|x-\dfrac{k}{n}\right| > \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *;*

et on pose $S_V(x) = \displaystyle\sum_{k\in V} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$ *et* $S_W(x) = \displaystyle\sum_{k\in W} \left|x-\frac{k}{n}\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

7. Montrer que $S_V(x) \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

8. Montrer que $S_W(x) \leqslant \dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

9. En déduire que $S(x) \leqslant \dfrac{5}{4\sqrt{n}}$.

Partie 4 Application à l'approximation uniforme

Pour $f \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$ en posant pour tout $x \in [0,1]$:

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

Le but de cette partie est d'étudier $\|B_n(f) - f\|_\infty$.

10. On considère, dans cette question uniquement, que f est la fonction définie par $f(x) = x^2$ pour $x \in [0,1]$.
Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$.
Que peut-on en déduire sur $\|B_n(f) - f\|_\infty$ lorsque $n \to +\infty$?

11. Démontrer que pour tout $f \in E$, il existe un réel $M_f \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant M_f \left|x-y\right|$$

12. Soit $f \in E$. Montrer, pour tout $x \in [0,1]$, la relation :

$$B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$$

13. Montrer que si $f \in E$, alors il existe un réel $c_f \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\|B_n(f) - f\right\|_\infty \leqslant \dfrac{c_f}{\sqrt{n}}$.

14. Que peut-on en déduire concernant la suite de fonctions $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$?

15. Déduire de ce qui précède le résultat suivant :
Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in [0,1],\ P(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant P(x) + \varepsilon$$

Partie 5 Une application

16. On considère une fonction $f \in E$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Que peut-on en déduire sur f ?

Correction DS 4

Problème I

Source : CCP PC 2023 exercice 1.

Partie 1 Étude d'un premier exemple

1. Par définition de f, $f(v) = (4,1)$. On a alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc la famille $(v, f(v))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Par définition, f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.
► **Image, base (2), conclusion** $\boxed{4}$

2. On détermine le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f(x) = (-1)^2 \det(f - x\,\mathrm{id}) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = (4-x)(1-x)+2 = x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

On a donc $\mathrm{Sp}(f) = \{2,3\}$ et χ_f est scindé à racines simples donc chaque sous-espace propre de f est de dimension 1. On note que :

$$f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_2(f)$. Soit $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in E_3(f) \iff \left\{\begin{array}{r} 4x-2y=3x \\ x+y=3y \end{array}\right. \iff x-2y=0 \iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2y\\y\end{pmatrix}$$

Donc $\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(f)$.
► χ_f **définition,** $(x-2)(x-3)$**,** $\mathrm{Sp}(f) = \{2,3\}$**,** $(1,1)$**,** $(2,1)$ $\boxed{5}$

3. Considérons v un vecteur propre de f, par exemple $v = (1,1)$. Alors $v \neq 0$et $v, f(v)$ sont colinéaires donc $(v, f(v))$ n'est pas libre donc $(v, f(v))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.
► **Exemple, liée, conclusion** $\boxed{3}$

Partie 2 Étude d'un deuxième exemple

4. On calcule :

$$M^2 - M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) = 2\mathrm{I}_3$$

On a donc $M^2 = M + 2\mathrm{I}_3$ et comme g est canoniquement associé à M, $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}$.
► **Justification** $g^2 = g + 2\,\mathrm{id}$ $\boxed{2}$

5. D'après la question précédente, le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est annulateur de M. On trouve $P = (X-2)(X+1)$ donc P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ donc M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et de plus $\mathrm{Sp}(M) \subset \{2,-1\}$. On en déduit également que χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$ donc la trace de M est la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicité. Comme $\mathrm{tr}(M) = 0$, on a nécessairement 2 qui est valeur propre de M de multiplicité 1 et -1 valeur propre de M de mutiplicité 2, donc $\mathrm{Sp}(M) = \{2,-1\}$.
► **Annulateur scindé rac. simple, diagonalisable, inclusion, égalité** $\{2,-1\}$ $\boxed{4}$

6. Pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$g^2(v) = g(v) + 2v$$

donc la famille $(v, g(v), g^2(v))$ est liée et ce n'est par conséquent pas une base de $\mathbb{R}^3$. Par conséquent, l'endomorphisme g n'est pas cyclique.

▶ **Relation, famille liée, non cyclique** $\boxed{3}$

Partie 3 Étude d'un troisième exemple

7. Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P + Q) &= (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)(X) = \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P(X) - Q(X)\\ &= \lambda \Delta(P) + \Delta(Q)\end{aligned}$$

donc Δ est linéaire. On sait que $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}(1, X, \ldots, X^n)$, or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k \in \mathbb{R}_n[X]$$

On en déduit que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ, donc Δ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

▶ **Linéaire, argument degré, rédaction, conclusion** $\boxed{4}$

8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on utilise le binôme de Newton :

$$\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^j - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$$

avec en particulier $\Delta(X^0) = 0$.

▶ **Simplification, conclusion** $\boxed{2}$

9. Considérons $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant, noté :

$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

avec $d = \deg P \geqslant 1$, $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}$ et $a_d \neq 0$. Par linéarité de Δ :

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k \Delta(X^k) = a_d \Delta(X^d) + \sum_{k=1}^{d-1} a_k \Delta(X^k)$$

car $\Delta(1) = 0$. On a noté à la question précédente que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(X^k) = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$ donc :

$$\deg \Delta(X^k) = k - 1$$

et ainsi :

$$\deg\left(\sum_{k=1}^{d-1} a_k \Delta(X^k)\right) \leqslant d - 2$$

Par ailleurs, $\deg(a_d \Delta(X^d)) = d - 1$, on a donc $\deg(\Delta(P)) = d - 1$ car c'est la somme d'un polynôme de degré $d-1$ et d'un polynôme de degré strictement inférieur à $d-1$. On a donc :

$$\deg(\Delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1$$

▶ **Écriture, degré d, degré $\leqslant d-1$, conclusion** $\boxed{4}$

10. Considérons un polynôme P de degré n, par exemple $P = X^n$ ainsi que la famille $\mathscr{F} = (P, \Delta(P), \ldots, \Delta^n(P))$. D'après ce qui précède, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\Delta^k(P)$ est de degré $n-k$. La famille $\mathscr{F}$ est donc une famille d'éléments de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est échelonnée en degrés, elle est donc libre. De plus $\mathrm{card}\,\mathscr{F} = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ donc $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Ceci montre que Δ est cyclique.

▶ **X^n, famille, échelonnée, base, conclusion** $\boxed{5}$

Partie 4 Cas d'un endomorphisme diagonalisable

11. On considère pour $p \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(p) : h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

Comme $h^0 = \mathrm{id}$ et $\lambda_1^0 = \cdots = \lambda_n^0 = 1$, $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{H}(p)$ est vraie. On a donc :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

et par linéarité de h :

$$\begin{aligned} h^{p+1}(v) = h(h^p(v)) &= h(\alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n) \\ &= \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n \end{aligned}$$

donc $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, $\mathscr{H}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

▶ **Hypothèse, initialisation, hérédité 2, conclusion** $\boxed{5}$ On demande une démonstration, il faut faire une démonstration

12. On a :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \det \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1\lambda_1 & \cdots & \alpha_1\lambda_1^{n-1} \\ \alpha_2 & \alpha_2\lambda_2 & \cdots & \alpha_2\lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n\lambda_n & \cdots & \alpha_n\lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

▶ **Écriture, expression Vandermonde, conclusion** $\boxed{2}$

13. **On suppose h cyclique.** Il existe alors un certain vecteur $v \in E$ tel que la famille $\mathscr{F}$ soit une base de E. On a alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

ce qui implique en particulier :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

et donc $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont deux à deux distincts, ainsi h admet n valeurs propres distinctes.
On suppose que h admet n valeurs propres distinctes, autrement dit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distincts. On considère le vecteur :

$$v = v_1 + \cdots + v_n$$

ce qui revient à prendre $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$ dans les questions précédentes. On a alors :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\lambda_j - \lambda_i) \neq 0$$

donc la famille $\mathscr{F}$ est une base de E, donc h est cyclique.
L'équivalence est démontrée.

▶ **Supp. h cyclique, base, déterminant, valeurs propres** $\boxed{4}$

▶ **Supp. valeurs propres, vecteur, déterminant, base** $\boxed{4}$

Problème II

Source : Centrale PC 2012 partie 1 adaptée.

Partie 1 Norme et suite de fonctions

1. Si $f \in E$, alors f est de classe C^1 sur $[0,1]$. On en déduit que les applications f et $|f|$ sont continues sur le segment $[0,1]$. L'application $|f|$ est donc bornée et atteint ses bornes de sorte que la borne supérieure de $|f|$ est bien définie (c'est même un maximum). Ainsi, $\|f\|_\infty$ est bien définie. De plus, on a clairement $\|f\|_\infty \geqslant 0$ pour tout $f \in E$. Pour $f, g \in E$, on a :

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f(x)+g(x)\right| \leqslant \left|f(x)\right| + \left|g(x)\right| \leqslant \left\|f\right\|_\infty + \left\|g\right\|_\infty$$

On en déduit que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de l'ensemble $\{|f(x)+g(x)| \mid x \in [0,1]\}$. Par définition de la borne supérieure :

$$\left\|f+g\right\|_\infty = \sup\left\{\left|f(x)+g(x)\right| \mid x \in [0,1]\right\} \leqslant \left\|f\right\|_\infty + \left\|g\right\|_\infty$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\|\lambda f\right\|_\infty = \sup\left\{\left|\lambda f(x)\right| \mid x \in [0,1]\right\} = \sup\left\{|\lambda| \cdot \left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\right\} = |\lambda| \sup\left\{\left|f(x)\right| \mid x \in [0,1]\right\} = |\lambda| \left\|f\right\|_\infty$$

Supposons maintenant que $\|f\|_\infty = 0$. On a alors :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant \left|f(x)\right| \leqslant \left\|f\right\|_\infty = 0$$

et la fonction f est nulle sur le segment $[0,1]$, c'est à dire $f = 0_E$. L'application $\|\ \|_\infty$ est une norme sur E.

► **Définition, positivité, inégalité triangulaire, homogénéité, définie-positive** $\boxed{5}$

2. Pour tout $x \in [0,1]$:

$$f_n(x) = \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f : x \mapsto x^2$. On a ensuite :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,1],\ f_n(x) - f(x) &= \frac{x}{n} + \frac{n-1}{n}x^2 - x^2 = \frac{x-x^2}{n}\\ \left|f_n(x)-f(x)\right| &= \frac{|x-x^2|}{n} \leqslant \frac{2}{n} \quad \text{(indépendant de } x\text{)}\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\left\|f_n - f\right\|_\infty \leqslant \frac{2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

► **Limite, convergence simple** $\boxed{2}$

► **Majoration, indép. x, norme ∞, limite, conclusion** $\boxed{5}$

Partie 2 Quelques calculs de sommes

3. Il s'agit simplement de la formule du binôme de Newton :

$$\forall a,b \in \mathbb{R},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Appliquée avec $a = x$ et $b = 1-x$, elle donne $\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.}$

► **Binôme de Newton** $\boxed{1}$

4. **Méthode 1.** Pour $k \in [\![1,n]\!]$:

$$k\binom{n}{k} = \frac{kn!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{nn!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

On peut supprimer le terme correspondant à $k = 0$ dans la somme puisqu'il est nul :

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} x^k(1-x)^{n-k}$$

On réalise un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k-1} x^{k+1}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= nx\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} x^{k}(1-x)^{(n-1)-(k-1)} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx\end{aligned}$$

(toujours avec la formule du binôme).
Méthode 2. On considère $x \in \mathbb{R}$ fixé et on définit la fonction :

$$f : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k(1-x)^{n-k}$$

Avec la formule du binôme de Newton, on a $f(t) = (t+1-x)^n$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction f est dérivable et en dérivant chaque membre de cette égalité, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kt^{k-1}(1-x)^{n-k} = n(t+1-x)^{n-1}$$

En multipliant par t, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kt^{k}(1-x)^{n-k} = nt(t+1-x)^{n-1}$$

On applique avec $t = x$:

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k}(1-x)^{n-k} = nx(x+1-x)^{n-1} = nx$$

On peut faire commencer la somme à 0 car le terme pour $k = 0$ est nul et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} kx^{k}(1-x)^{n-k} = nx}$$

► **Méthode, mise en œuvre, conclusion** $\boxed{3}$

5. On propose de même deux méthodes.
Méthode 1. On utilise ici pour $k \in [\![2, n]\!]$:

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} x^k(1-x)^{n-k}\\ &= n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} x^{k+2}(1-x)^{(n-2)-k}\\ &= n(n-1)x^2\end{aligned}$$

Méthode 2. On dérive une nouvelle fois :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} k(k-1)t^{k-2}(1-x)^{n-k} = n(n-1)(t+1-x)^{n-2}$$

En multipliant par t^2, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} k(k-1)t^{k}(1-x)^{n-k} = n(n-1)t^2(t+1-x)^{n-2}$$

On applique avec $t = x$:

$$\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k} k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2} = n(n-1)x^2$$

On peut faire commencer la somme à 0 car les termes pour $k=0$ et $k=1$ sont nuls et ainsi :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2}$$

► **Méthode, mise en œuvre, conclusion** $\boxed{3}$

6. On développe avec les identités remarquables et on fait apparaitre les expressions des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(x^2-2x\frac{k}{n}+\frac{k(k-1)}{n^2}+\frac{k}{n^2}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\\ &= x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}-\left(\frac{2x}{n}-\frac{1}{n^2}\right)\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\\ &\qquad+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\\ &= x^2-\left(\frac{2x}{n}-\frac{1}{n^2}\right)nx+\frac{1}{n^2}n(n-1)x^2 = x^2-2x^2+\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}x^2\\ &= \frac{x}{n}-\frac{1}{n}x^2 = \frac{x(1-x)}{n}\end{aligned}$$

On a ainsi démontré que $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}}$.

► **Développer, faire apparaitre $k(k-1)$, simplifier** $\boxed{3}$

Partie 3 Majoration d'une somme

7. Par définition des ensembles V et W, on a $S_V(x)+S_W(x)=S(x)$. Pour $k\in V$, on a :

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}S_V(x)=\sum_{k\in V}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k\in V}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

car les quantités $x^k(1-x)^{n-k}$ sont positives puisque $x\in[0,1]$. On a donc $S_V(x)\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

▶ **Majoration de $S_V(x)$** $\boxed{2}$

8. Pour $k\in W$, on a :

$$1\leqslant\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|$$

et ainsi :

$$\begin{aligned}S_W(x)&=\sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\sqrt{n}\sum_{k\in W}\left|x-\frac{k}{n}\right|^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&\leqslant\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

On a donc $S_W(x)\leqslant\dfrac{x(1-x)}{\sqrt{n}}$.

▶ **Majoration de $S_W(x)$** $\boxed{2}$

9. En ajoutant les deux inégalités obtenues aux questions précédentes :

$$S(x)=S_V(x)+S_W(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{x(1-x)}{\sqrt{n}}=\frac{1+x(1-x)}{\sqrt{n}}$$

Une étude rapide de la fonction $x\mapsto 1+x(1-x)$ permet de montrer que $1+x(1-x)\leqslant 5/4$ et ainsi :

$$S(x)=\frac{5}{4\sqrt{n}}$$

▶ **Majoration de $x(1-x)$ et conclusion** $\boxed{2}$

Partie 4 Application à l'approximation uniforme

10. On note ici $f:x\mapsto x^2$. Pour $x\in[0,1]$, on a alors avec les résultats de la partie 2 :

$$\begin{aligned}B_n(f)(x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{k(k-1)+k}{n^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\frac{nx+n(n-1)x^2}{n^2}=\frac{x}{n}+\frac{n-1}{n}x^2\end{aligned}$$

On retrouve ainsi que $B_n(f)=f_n$, suite de fonctions étudiée dans la première partie.
D'après la question 2, $\|B_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

▶ **Faire apparaitre $k(k-1)$, terminer le calcul** $\boxed{2}$

▶ **Partie 1, $\|B_n(f)-f\|_\infty\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$** $\boxed{2}$

11. L'application f est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$ donc l'application $|f'|$ est définie et continue sur le segment $[0,1]$. Elle admet donc une borne supérieure sur ce segment et on note :

$$M_f = \sup_{x\in[0,1]} \left|f'(x)\right| = \|f'\|_\infty$$

L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur le segment $[0,1]$ donne alors :

$$\forall x \in [0,1],\ \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant M_f\left|x-y\right|$$

► Fonction $|f'|$ majorée puis inégalité des accroissements finis, expliqué correctement $\boxed{2}$

12. Soit $x \in [0,1]$. On utilise la relation $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = 1$:

$$\begin{aligned} B_n(f)(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} - f(x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

On a bien $B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$.

► Utiliser la question 3, regrouper les sommes $\boxed{1}$

13. On combine les résultats des deux questions précédentes :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1],\ \left|B_n(f)(x)-f(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n} \left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right) \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n} M_f\left|\frac{k}{n}-x\right| \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = M_f S(x) \end{aligned}$$

Puis, avec le résultat de la question 9 :

$$\forall x \in [0,1],\ \left|B_n(f)(x)-f(x)\right| \leqslant \frac{5M_f}{4\sqrt{n}}$$

On en déduit que $\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \leqslant \dfrac{c_f}{\sqrt{n}}$ en posant $c_f = 5M_f/4$.

► Question 11, question 12, question 9 $\boxed{3}$

14. Comme $\dfrac{c_f}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a par encadrement :

$$\left\|B_n(f)-f\right\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

► Encadrement, convergence uniforme $\boxed{2}$

15. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et soit $\varepsilon > 0$. Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $c_f/\sqrt{n} \leqslant \varepsilon$. Pour cet entier n, on a $\|B_n(f)-f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ c'est à dire :

$$\forall x \in [0,1],\ \left|B_n(f)(x)-f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

ou encore :

$$\forall x \in [0,1],\ B_n(f)(x)-\varepsilon \leqslant f(x) \leqslant B_n(f)(x)+\varepsilon$$

et $B_n(f)$ est bien un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

► Explications $\boxed{2}$

Partie 5 Une application

16. On va démontrer que f est nulle sur $[0,1]$. On va considérer pour cela la suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ en posant pour $n \geqslant 1$: $g_n = B_n(f) \times f$.

- On sait que la suite de fonctions $(B_n(f))$ converge uniformément, donc simplement, vers f sur $[0,1]$, on a donc :

$$\forall x \in [0,1],\ g_n(x) = B_n(f)(x) \times f(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f^2(x)$$

La suite de fonctions (g_n) converge donc simplement vers f^2 sur $[0,1]$.

- On a de plus :

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [0,1],\ \left|g_n(x) - f^2(x)\right| = \left|(B_n(f)(x) - f(x))f(x)\right| &= \left|f(x)\right|\left|B_n(f)(x) - f(x)\right| \\ &\leqslant \left\|f\right\|_\infty \left\|B_n(f) - f\right\|_\infty\end{aligned}$$

Par définition de $\|\ \|_\infty$, on en déduit :

$$\forall n \geqslant 1,\ \left\|g_n - f^2\right\|_\infty \leqslant \left\|f\right\|_\infty \left\|B_n(f) - f\right\|_\infty$$

Or $\|B_n(f) - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc par encadrement $\|g_n - f^2\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers f^2 sur $[0,1]$.

- Les fonctions g_n sont continues sur $[0,1]$, on peut donc appliquer le théorème d'échange limite intégrale avec convergence uniforme et on obtient :

$$\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

- Considérons maintenant $n \geqslant 1$. Par définition, $B_n(f)$ est une combinaison linéaire des polynômes $X^k(1-X)^{n-k}$ avec $k \in [\![0,n]\!]$ et ces polynômes sont de degré n donc $B_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, on le note :

$$B_n(f) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 B_n(f)(x)f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} a_kx^kf(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^1 x^kf(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= 0\end{aligned}$$

car on a supposé que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^kf(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

- Par unicité de la limite, on a $\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$. De plus, la fonction f^2 est continue et positive sur $[0,1]$ donc pour tout $x \in [0,1]$, $f^2(x) = 0$. On en déduit que f est nulle sur $[0,1]$.

► **Résultat, utilisation de ce qui précède, justifications** $\boxed{5}$

Sur l'ensemble de la copie :

► **Présentation générale** $\boxed{1}$

► **Résultats en évidence** $\boxed{1}$

► **Rédaction** $\boxed{1}$

► **Utilisation précise du vocabulaire mathématique** $\boxed{1}$