DS 3 – Durée 4h – 16 novembre 2024	**PC***

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants.

Problème I

On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
On dit qu'une matrice K est une matrice scalaire lorsqu'il existe un nombre complexe k tel que $K = k\mathrm{I}_n$ où I_n désigne la matrice identité de taille n.
On dit qu'une matrice A a la propriété de Dirac lorsque A^2 est une matrice scalaire.
On note $\mathrm{tr}(M)$ la trace d'une matrice M et $\det(M)$ son déterminant.

Partie 1

On considère dans cette partie la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étudier la diagonalisabilité de A.

2. Déterminer si la matrice A possède la propriété de Dirac.

Partie 2

Dans cette partie, on considère des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

3. Montrer que : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, $M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)\mathrm{I}_2 = 0$.

4. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et A est de trace nulle, alors A a la propriété de Dirac.

5. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ a la propriété de Dirac, alors A est une matrice scalaire ou A est une matrice de trace nulle.

6. On note D_2 l'ensemble des matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ dont la trace est nulle. Montrer que D_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et donner sa dimension.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Montrer que (J, K, L) est une base de D_2.

8. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$ et $A = xJ + yK + zL$. Calculer A^2 en fonction de x, y, z et I_2.

9. L'ensemble des matrices appartenant à $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ qui ont la propriété de Dirac est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$? *La réponse sera justifiée.*

Partie 3

Dans cette partie, on considère des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

10. Montrer que si A est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac et si A^2 est non nulle, alors A est inversible et A^{-1} vérifie aussi la propriété de Dirac.

11. Montrer que si A est une matrice qui vérifie la propriété de Dirac, alors A possède au plus deux valeurs propres.

12. Montrer que si A et B sont des matrices qui vérifient la propriété de Dirac et si $A+B$ vérifie également la propriété de Dirac, alors $AB+BA$ est une matrice scalaire.

13. Une matrice A appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui vérifie la propriété de Dirac est-elle nécessairement diagonalisable ? *La réponse sera justifiée.*

Partie 4

Dans cette partie on considère des matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ et en particulier les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A = 3M + 2N + 2P$.

14. Calculer M^2, N^2 et P^2. Montrer que $MN + NM = MP + PM = NP + PN = 0$.

15. On considère le sous-espace vectoriel $D_n = \mathrm{Vect}(M, N, P)$. Montrer que toutes les matrice appartenant à D_n ont la propriété de Dirac. En déduire A^2.

16. Étudier la diagonalisabilité de A et déterminer les valeurs propres de A ainsi que la dimension de ses sous-espaces propres.

17. La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle bornée ? *La réponse sera justifiée.*

Problème II

Ce problème étudie la transformation de Laplace d'une certaine catégorie de fonctions. Cette transformation est utilisée pour la résolution d'équations et de systèmes différentiels.

Notations

— *On note $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs complexes.*
On admet que $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

— *Dans toute la suite, on considère l'ensemble E des fonctions f continues sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que pour tout nombre réel p strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty}|f(t)|\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.*

Partie 1 Transformée de Laplace, premiers exemples

1. Démontrer que E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

2. Montrer que, si f appartient à E alors, pour tout $p\in\mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ converge.

La valeur de cette intégrale est alors notée $F(p)$:

$$\forall p\in\mathbb{R}^{+*},\ F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

On définit ainsi une fonction F, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

3. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccc}\mathscr{L}: & E & \rightarrow & \mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*},\mathbb{C})\\ & f & \mapsto & F\end{array}$$

est linéaire.

L'application $\mathscr{L}$ s'appelle la transformation de Laplace et, pour tout $f\in E$, $F=\mathscr{L}(f)$ s'appelle la transformée de Laplace de f.

4. Pour tout entier naturel n, on note f_n la fonction $t\mapsto t^n$. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n\in E$.
On note alors $F_n=\mathscr{L}(f_n)$.

5. Pour tout nombre réel p strictement positif, calculer $F_0(p)$.

6. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. À l'aide d'une intégration par parties, établir, pour tout réel p strictement positif, une relation entre $F_n(p)$ et $F_{n-1}(p)$.

7. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n et tout réel p strictement positif,

$$F_n(p)=\frac{n!}{p^{n+1}}$$

8. Pour tout nombre réel a positif ou nul et tout nombre réel b, on note $f_{a,b}$ la fonction $t\mapsto\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt}$.
Montrer que $f_{a,b}\in E$ et calculer $F_{a,b}=\mathscr{L}(f_{a,b})$.

9. En déduire que les fonctions $g_{a,b}:t\mapsto\mathrm{e}^{-at}\cos(bt)$ et $h_{a,b}:t\mapsto\mathrm{e}^{-at}\sin(bt)$ appartiennent à E et calculer leurs transformées de Laplace $G_{a,b}=\mathscr{L}(g_{a,b})$ et $H_{a,b}=\mathscr{L}(h_{a,b})$.

10. Plus généralement, montrer que toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, appartient à E.

11. Donner un exemple de fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ n'appartenant pas à E.

Partie 2 Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

On suppose que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, que $f \in E$ et $f' \in E$ et pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, $f(t)\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

12. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathscr{L}(f')(p) = p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)$$

On suppose, en plus, que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^+$, que $f'' \in E$ et $f'(t)\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$.

13. Démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathscr{L}(f'')(p) = p^2\mathscr{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$$

Partie 3 Injectivité de la transformation de Laplace

On se propose dans cette sous-partie de démontrer que l'application $\mathscr{L}$ est injective sur E.
On admet pour cela le théorème suivant (théorème de Weierstrass) :

> *Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ continue, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ telle que :*
>
> $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \left|f(t) - P_n(t)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On considère une fonction f de E vérifiant $\mathscr{L}(f) = 0$. Pour tout réel $t \in \mathbb{R}^+$, on pose $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

14. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et calculer sa dérivée.

15. Montrer que g est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$.

16. Justifier, pour tout $p \in \mathbb{R}^{+*}$, l'existence de $\mathscr{L}(g)(p)$ et démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*},\ \mathscr{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathscr{L}(f)(p+1)$$

On note φ la fonction définie sur $[0,1]$ en posant

$$\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) \text{ si } 0 < u \leqslant 1 \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \text{ si } u = 0 \end{cases}$$

17. Montrer que φ est continue sur le segment $[0,1]$.

18. En effectuant le changement de variables $t = -\ln u$ démontrer que

$$\forall p \in \mathbb{R}^{+*},\ \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u$$

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u = 0$ et que pour tout polynôme P,

$$\int_0^1 P(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

20. En utilisant le résultat admis au début de cette partie, montrer qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \left|\varphi(t)\right|^2\mathrm{d}t\right) = 0$$

21. En déduire que $f = 0$.

22. Démontrer que $\mathscr{L}$ est injective.

Correction DS 3

Problème I

Source : concours ATS 2005 problème 3

Partie 1

1. Le calcul du polynôme caractéristique de A est facile, par développement par rapport à la deuxième ligne on obtient $\chi_A = (X-2)(X+2)^2$. On a alors $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 2\}$, $\dim E_2(A) = 1$ car 2 est racine simple de χ_A. On a directement :

$$A + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est non nulle et ses colonnes sont proportionnelles donc $\mathrm{rg}(A+2\mathrm{I}_3) = 1$ et avec le théorème du rang :

$$\dim E_{-2}(A) = \dim \mathrm{Ker}(A+2\mathrm{I}_3) = 3 - \mathrm{rg}(A+2\mathrm{I}_3) = 2$$

On a donc $\dim E_2(A) + \dim E_{-2}(A) = 3$ donc A est diagonalisable.

► **$\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 2\}$, $\dim E_2(A) = 1$, $\dim E_{-2}(A) = 2$, conclusion** $\boxed{4}$ Au autre méthode

2. On peut faire le calcul de A^2. On peut aussi utiliser la question précédente : il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est diagonale avec $D = \mathrm{diag}(-2, -2, 2)$. Alors $D^2 = 4\mathrm{I}_3$ et :

$$A^2 = PD^2P^{-1} = 4P\mathrm{I}_3P^{-1} = 4\mathrm{I}_3$$

On en déduit que A^2 est une matrice scalaire donc A a la propriété de Dirac.

► **A^2, conclusion** $\boxed{2}$

Partie 2

3. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Méthode 1 : en prenant des coefficients pour M, on peut effectuer directement le calcul.

Méthode 2 : en utilisant des résultats sur le polynôme caractéristique. On sait que χ_M est de degré 2, son coefficient constant est $\det(M)$ et le coefficient de X est $-\mathrm{tr}(M)$ donc :

$$\chi_M = X^2 - \mathrm{tr}(M)X + \det(M)$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_M(M) = 0$ donc :

$$M^2 - \mathrm{tr}(M)M + \det(M)\mathrm{I}_2 = 0$$

► **Cours, expression χ_M, Cayley-Hamilton** $\boxed{3}$ Toute méthode correcte

4. On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathrm{tr}(A) = 0$. D'après la question précédente, on a $A^2 + \det(A)\mathrm{I}_2 = 0$ donc $A^2 = -\det(A)\mathrm{I}_2$. Ainsi, A^2 est une matrice scalaire donc A a la propriété de Dirac.

► **Question précédente, conclusion** $\boxed{2}$

5. On suppose que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a la propriété de Dirac. Ainsi, A^2 est une matrice scalaire donc il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = k\mathrm{I}_2$. D'après la question 3 :

$$\mathrm{tr}(A)A = A^2 + \det(A)\mathrm{I}_2 = (k + \det(A))\mathrm{I}_2$$

Si de plus $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, alors :

$$A = \frac{k + \det(A)}{\mathrm{tr}(A)}\mathrm{I}_2$$

donc A est une matrice scalaire. Par conséquent, A est soit une matrice de trace nulle soit une matrice scalaire.

► **A^2 scalaire, supposer $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, conclusion** $\boxed{3}$

6. **Méthode 1 :** on démontre de la manière habituelle que D_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on détermine une famille génératrice de D_2 puis on démontre que c'est une base de D_2.
Méthode 2 : en utilisant des notions sur les formes linéaires et les hyperplans. D'après le cours, l'application tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc $D_2 = \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. De plus, $\mathrm{tr}(\mathrm{I}_2) \neq 0$ donc tr est une forme linéaire non nulle et ainsi D_2 est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On a donc :

$$\dim D_2 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) - 1 = 3$$

► tr **linéaire, noyau, non nulle, dimension** $\boxed{4}$ Toute méthode correcte

7. Il est clair que J, K, L sont des éléments de D_2. Soit $M \in D_2$, on note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, comme $\mathrm{tr}(M) = 0$ on a $d = -a$ donc :

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{b+c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{b-c}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= aJ + \frac{b+c}{2}K + \frac{b-c}{2}L \end{aligned}$$

Toute matrice $M \in D_2$ est combinaison linéaire d'éléments de la famille (J, K, L) donc (J, K, L) est génératrice de D_2. Cette famille est de plus de cardinal 3 et $\dim D_2 = 3$ donc (J, K, L) est une base de D_2.

► **Appartiennent à D_2, génératrice, dimension** $\boxed{3}$

8. Notons que comme A est de trace nulle, A^2 est une matrice scalaire et $A^2 = -\det(A)\mathrm{I}_2$. Or on a ici :

$$A = xJ + yK + zL = \begin{pmatrix} x & y+z \\ y-z & -x \end{pmatrix}$$

donc $\det(A) = -x^2 - (y-z)(y+z)$ et ainsi :

$$A^2 = -\det(A)\mathrm{I}_2 = (x^2 + (y-z)(y+z))\mathrm{I}_2 = (x^2 + y^2 - z^2)\mathrm{I}_2$$

► **Trace nulle,** $\det(A) = -x^2 - y^2 + z^2$**, conclusion** $\boxed{3}$

9. Quelques éléments de réponse intéressants (mais pas tous nécessaires) pour cette question ouverte. Certains points n'ont pas forcément été vus en classe et s'adressent aux 5/2.
   - Si on note Dirac_2 l'ensemble des matrices de taille 2 qui ont la propriété de Dirac, on a démontré à la question 5 qu'un élément de Dirac_2 appartient soit à D_2 (matrices de trace nulle) soit à $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$ (matrices scalaires), on a donc :

$$\mathrm{Dirac}_2 \subset D_2 \cup \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$$

- Réciproquement, on a démontré qu'une matrice de trace nulle a la propriété de Dirac et il est clair qu'une matrice scalaire également donc :

$$\mathrm{Dirac}_2 = D_2 \cup \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_2)$$

- On a donc I_2, J, K, L qui sont des éléments de Dirac_2. On peut facilement montrer que cette famille est libre et elle est de cardinal 4. Si Dirac_2 était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on aurait $\dim \mathrm{Dirac}_2 \geqslant 4$ et comme $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = 4$ on aurait donc $\mathrm{Dirac}_2 = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ ce qui est clairement faux.
- La matrice nulle a la propriété de Dirac et si A a la propriété de Dirac et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors $(\lambda A)^2 = \lambda^2 A^2$ est une matrice scalaire. Ainsi, Dirac_2 est non vide et stable par multiplication par un scalaire.
- Il reste à voir si la somme de deux matrices qui ont la propriété de Dirac a également cette propriété. Si A et B ont la propriété de Dirac et sont de trace nulle alors leur somme également. De même, si A et B sont scalaires alors leur somme également.
- Il semble donc pertinent de s'intéresser à une matrice A de trace nulle et B scalaire.

En conclusion, prenons par exemple $A = \mathrm{I}_2$ et $B = J = \mathrm{diag}(1, -1)$. On a $A^2 = \mathrm{I}_2$ donc A a la propriété de Dirac, $B^2 = \mathrm{I}_2$ donc B a la propriété de Dirac et $A + B = \mathrm{diag}(2, 0)$ donc $(A+B)^2 = \mathrm{diag}(4, 0)$ n'est pas une matrice scalaire. Ainsi, $A + B$ n'a pas la propriété de Dirac.
L'ensemble des matrices qui ont la propriété de Dirac n'est pas stable par somme, ce n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
▸ Pour une réponse rigoureuse; 2 pour des éléments pertinents $\boxed{4}$

Partie 3

10. On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ a la propriété de Dirac. Il existe alors $k \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = k\mathrm{I}_n$. On suppose de plus que $A^2 \neq 0$, on a donc $k \neq 0$. On a alors :

$$\frac{1}{k} A \times A = \mathrm{I}_n$$

La matrice A est donc inversible et $A^{-1} = k^{-1} A$. Alors :

$$(A^{-1})^2 = \frac{1}{k^2} A^2 = \frac{1}{k} \mathrm{I}_n$$

Ainsi, $(A^{-1})^2$ est une matrice scalaire donc A^{-1} a la propriété de Dirac.
▸ Hypothèses, inversible, A^{-1}, Dirac $\boxed{4}$

11. On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui a la propriété de Dirac et on note $k \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = k\mathrm{I}_n$. Le polynôme $P = X^2 - k$ est alors annulateur de A. D'après le cours, les valeurs propres de A se trouvent parmi les racines (complexes) de P. Le polynôme P est de degré 2 donc il possède au plus deux racines et ainsi A possède au plus deux valeurs propres.
▸ Annulateur degré 2, au plus 2 racines, inclusion $\boxed{3}$

12. Par hypothèse, A^2, B^2 et $(A+B)^2$ sont des matrices scalaires. Or :

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$
$$AB + BA = (A+B)^2 - A^2 - B^2$$

On en déduit que $AB + BA$ est une matrice scalaire comme combinaison linéaire de matrices scalaires.
▸ Calculs, conclusion $\boxed{2}$

13. Quelques éléments de réponse intéressants (mais pas tous nécessaires) pour cette question ouverte. Certains points n'ont pas forcément été vus en classe et s'adressent aux 5/2.

- Si A a la propriété de Dirac, il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $A^2 = k\mathrm{I}_n$ et ainsi $P = X^2 - k$ est annulateur de A. Si $k \neq 0$ ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$ donc A est diagonalisable.
- Si on cherche un contre exemple, il s'agit donc nécessairement d'une matrice A telle que $A^2 = 0$.
- Si $A^2 = 0$ et $A \neq 0$ on sait que A a la propriété de Dirac (car A^2 est scalaire) et A n'est pas diagonalisable (car nilpotente et non nulle). L'existence d'une telle matrice montre que la propriété de Dirac n'implique pas la diagonalisabilité.

Considérons $A = E_{1n}$ (matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en ligne 1 et colonne n qui vaut 1). On a $A^2 = 0$ donc A^2 est scalaire donc A a la propriété de Dirac. Comme A est triangulaire supérieure on a $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et avec le théorème du rang :

$$\dim E_0(A) = n - \mathrm{rg}(A) = n - 1 \neq n$$

donc A n'est pas diagonalisable.
Il existe des matrices A qui ont la propriété de Dirac et ne sont pas diagonalisables.
► Pour une réponse rigoureuse; 2 pour des éléments pertinents $\boxed{4}$

Partie 4

14. On trouve après calcul $M^2 = \mathrm{I}_4$, $N^2 = -\mathrm{I}_4$ et $P^2 = \mathrm{I}_4$. Les autres calculs sont faciles (en rédiger un).
► Trois résultats pour les carrés 3, au moins une explication pour les sommes $\boxed{4}$

15. On considère une matrice appartenant à D_n notée $xM + yN + zP$ avec $x, y, z \in \mathbb{C}$. Avec les résultats de la question précédente :

$$\begin{aligned}
(xM + yN + zP)^2 &= (xM + yN + zP)(xM + yN + zP) \\
&= x^2M^2 + xyMN + xzMP + yxNM + y^2N^2 + yzNP + zxPM + zyPN + z^2P^2 \\
&= (x^2 - y^2 + z^2)\mathrm{I}_4 + xy(MN + NM) + xz(MP + PM) + yz(NP + PN) \\
&= (x^2 - y^2 + z^2)\mathrm{I}_4
\end{aligned}$$

On en déduit que $(xM+yN+zP)^2$, ainsi les matrices $xM + yN + zP$ appartenant à D_n ont la propriété de Dirac. En particulier, on obtient :

$$A^2 = (3^2 - 2^2 + 2^2)\mathrm{I}_2 = 9\mathrm{I}_2$$

► Carré, calculs précédents, conclusion, application à A $\boxed{4}$

16. **Il faut quand même éviter les calculs!** D'après la question précédente, le polynôme $X^2 - 9 = (X-3)(X+3)$ est annulateur de A. Ce polynôme est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-3, 3\}$. Notons p et q les multiplicités respectives des valeurs propres -3 et 3 (éventuellement $p = 0$ ou $q = 0$). Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$, on a $p + q = 4$ et :

$$\mathrm{tr}(A) = 0 = -3p + 3q = 3(q - p)$$

On en déduit que $q = p$ et ainsi $p = q = 2$. On a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 3\}$. De plus, comme A est diagonalisable, la dimension de chaque sous-espace propre de A est égale à la multiplicité de cette valeur propre donc $E_3(A)$ et $E_{-3}(A)$ sont de dimension 2.
► Annulateur, diagonalisable, inclusion, multiplicités, trace, dimensions $\boxed{6}$

17. À nouveau quelques éléments de réponse. Certains points n'ont pas forcément été vus en classe et s'adressent aux 5/2.
    - Le caractère borné est une propriété d'espace normé, indépendante de la norme choisie puisque $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie donc toutes les normes sont équivalentes.

- Il existe U inversible telle que $\Delta = U^{-1}AU$ est diagonale avec $\Delta = \operatorname{diag}(3,3,-3,-3)$. On a alors :

$$\Delta^k = \operatorname{diag}(3^k, 3^k, (-3)^k, (-3)^k) = 3^k \operatorname{diag}(1, 1, (-1)^k, (-1)^k)$$

  La suite (Δ^k) n'est clairement pas bornée.
- En reprenant les notations de l'énoncé, on a :

$$\begin{aligned} \Delta^k &= 3^k \mathrm{I}_4 \quad \text{si } k \text{ pair} \\ &= 3^k M \quad \text{si } k \text{ impair} \end{aligned}$$

- En particulier $\Delta^{2k} = 3^{2k}\mathrm{I}_4$ donc :

$$A^{2k} = U\Delta^{2k}U^{-1} = 3^{2k}\mathrm{I}_4$$

- On retrouve aussi ceci sachant que A a la propriété de Dirac : on a vu que $A^2 = 9\mathrm{I}_4$ donc $A^{2k} = 9^k\mathrm{I}_4$.

On remarque que $A^{2k} = 9^k\mathrm{I}_4$. La suite (9^k) n'est pas bornée donc la suite (A^{2k}) n'est pas bornée donc la suite (A^{2k}) n'est pas bornée.

► Pour une réponse rigoureuse ; 2 pour des éléments pertinents $\boxed{4}$

Problème II

Source : Centrale Supélec TSI 2023 épreuve 1 parties 2 et 4

Partie 1 Transformée de Laplace, premiers exemples

1. On va démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.
   - Par définition de E, on a $E \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.
   - Pour tout $p > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc la fonction constante égale à 1 appartient à E et ainsi $E \neq \emptyset$.
   - Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour tout $p > 0$, la fonction $t \mapsto (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{e}^{-pt}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall t \geqslant 0,\ \left|\lambda f(t) + g(t)\right| \mathrm{e}^{-pt} \leqslant |\lambda| \left|f(t)\right| \mathrm{e}^{-pt} + \left|g(t)\right| \mathrm{e}^{-pt}$$

     Or la fonction $t \mapsto |\lambda||f(t)|\mathrm{e}^{-pt} + |g(t)|\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ comme somme de deux fonctions intégrables donc, par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto |\lambda f(t) + g(t)|\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et ceci montre que $\lambda f + g \in E$.

Par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ donc E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

► $\neq \emptyset$, combinaison linéaire, continue, dominée, intégrable, stabilité, ccl $\boxed{6}$

2. Si $f \in E$ et $p > 0$, alors la fonction $t \mapsto |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ par définition, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ est alors absolument convergente donc convergente.

► Absolument convergente donc convergente $\boxed{1}$

3. D'après ce qui précède, l'application $\mathscr{L}$ est bien définie de E dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$. Pour $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\lambda f + g \in E$ et :

$$\begin{aligned} \forall p > 0,\ \mathscr{L}(\lambda f + g)(p) &= \int_0^{+\infty} (\lambda f(t) + g(t))\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad \text{car les deux intégrales convergent} \\ &= \lambda\mathscr{L}(f)(p) + \mathscr{L}(g)(p) \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{L}(\lambda f + g) = \lambda\mathscr{L}(f) + \mathscr{L}(g)$ et par conséquent $\mathscr{L}$ est linéaire.

► Somme, notation correcte, deux intégrales convergentes $\boxed{3}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $p > 0$, la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-pt}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et par croissances comparées :

$$\left|t^n \mathrm{e}^{-pt}\right| = \underset{t \to +\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

La fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc, par comparaison de fonctions positives, $\mapsto t^n \mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que $f_n \in E$.

► Continue, signe, référence, comparaison $\boxed{4}$

5. Pour $p > 0$:

$$F_0(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{p}\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{p}\left(\lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-pt} - 1\right) = \frac{1}{p}$$

► Résultat, une justification $\boxed{2}$

6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p > 0$. On a :

$$F_n(p) = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

On considère les fonctions :

$$u(t) = t^n \qquad v'(t) = \mathrm{e}^{-pt}$$

$$u'(t) = nt^{n-1} \qquad v(t) = -\frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pt}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et par croissances comparées :

$$u(t)v(t) = -\frac{1}{p}t^n\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{limite finie}$$

$$u(0)v(0) = 0$$

On peut donc réaliser l'intégration par parties dans l'intégrale convergente $F_n(p)$ et on obtient :

$$F_n(p) = \underbrace{\left[-\frac{1}{p}t^n\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \frac{n}{p}\int_0^{+\infty} t^{n-1}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{p}F_{n-1}(p)$$

► Fonctions, limite, résultat $\boxed{3}$

7. On considère pour $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(n) : \forall p > 0,\ F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

On a tout d'abord pour $p > 0$:

$$\frac{0!}{p^{0+1}} = \frac{1}{p} = F_0(p)$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathscr{H}(n-1)$ est vraie. Avec la question précédente, pour $p > 0$:

$$F_n(p) = \frac{n}{p}F_{n-1}(p) = \frac{n}{p}\cdot\frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

donc $\mathscr{H}(n)$ est vraie. Par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall p > 0,\ F_n(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

▸ Hypothèse, initialisation, hérédité, conclusion $\boxed{5}$

8. Soient $a \geqslant 0$ et $b \in \mathbb{R}$. La fonction $f_{a,b}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour $p > 0$:

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \left|\mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt}\mathrm{e}^{-pt}\right| = \mathrm{e}^{-at}\mathrm{e}^{-pt} = \mathrm{e}^{-(a+p)t}$$

Comme $a + p > 0$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-(a+p)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc $t \mapsto |f_{a,b}(t)|\mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ et on en déduit que $f_{a,b} \in E$. On a alors :

$$F_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at+\mathrm{i}bt}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-(a+p-\mathrm{i}b)t}}{a+p-\mathrm{i}b}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{a+p-\mathrm{i}b}\left(\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-(a+p-\mathrm{i}b)t} - 1\right)$$

Or on a noté que :

$$\left|\mathrm{e}^{-(a+p-\mathrm{i}b)t}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-(a+p)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

donc $\mathrm{e}^{-(a+p-\mathrm{i}b)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ et ainsi :

$$\boxed{F_{a,b} = \frac{1}{a+p-\mathrm{i}b} = \frac{a+p+\mathrm{i}b}{(a+p)^2+b^2}}$$

▸ Continue, module, référence, intégrable, primitive, limite, conclusion $\boxed{7}$

9. Les fonctions $g_{a,b}$ et $h_{a,b}$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et pour $p > 0$:

$$\forall t \in [0, +\infty[,\ \begin{aligned} \left|g_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-pt} \\ \left|h_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-pt} \end{aligned}$$

Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison de fonctions positives, $g_{a,b} \in E$ et $h_{a,b} \in E$. De plus :

$$\boxed{G_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} g_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Re}(f_{a,b}(t))\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Re}(F_{a,b}(t)) = \frac{a+p}{(a+p)^2+b^2}}$$

$$\boxed{H_{a,b}(p) = \int_0^{+\infty} h_{a,b}(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{Im}(f_{a,b}(t))\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}(F_{a,b}(t)) = \frac{b}{(a+p)^2+b^2}}$$

▸ Continue, majoration, référence, comparaison, deux calculs, deux résultats $\boxed{8}$

10. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et bornée. Pour $p > 0$, on a :

$$|f(t)|\mathrm{e}^{-pt} = \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\mathrm{e}^{-pt}\right)$$

La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-pt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ donc par comparaison de fonctions positives la fonction $t \mapsto |f(t)|\mathrm{e}^{-pt}$ aussi donc $f \in E$.

▸ Majoration, référence, comparaison, conclusion $\boxed{4}$

11. La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}^+$. Cependant, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \exp(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ c'est à dire $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(p-1)t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas convergente pour tout réel $p > 0$; par exemple si $p = 1$ cette intégrale est divergente. On en déduit que exp est continue sur $\mathbb{R}^+$ et n'appartient pas à E.

▸ Exemple, justification, rédaction $\boxed{3}$

Partie 2 Transformées de Laplace d'une dérivée et d'une dérivée seconde

12. Soit $p>0$. Comme $f' \in E$, on peut considérer :

$$\mathscr{F}(f')(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

On considère les fonctions :

$$u'(t) = f'(t) \qquad v(t) = \mathrm{e}^{-pt}$$
$$u(t) = f(t) \qquad v'(t) = -p\mathrm{e}^{-pt}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ et :

$$u(t)v(t) = f(t)\mathrm{e}^{-pt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{limite finie, donnée dans l'énoncé}$$
$$u(0)v(0) = f(0)$$

On peut donc réaliser l'intégration par parties dans l'intégrale convergente $\mathscr{L}(f')(p)$ et on obtient :

$$\mathscr{L}(f')(p) = \left[f(t)\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = -f(0) + p\mathscr{L}(f)(p)$$

► **Fonction, limite, calcul, conclusion** $\boxed{4}$

13. Vu les hypothèses faites ici sur f, on peut appliquer le résultat de la question précédente à f' et on obtient ainsi pour $p>0$:

$$\mathscr{L}(f'')(p) = p\mathscr{L}(f')(p) - f'(0) = p\big(p\mathscr{L}(f)(p) - f(0)\big) - f'(0) = p^2\mathscr{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0)$$

► **Question précédente avec f', calcul, conclusion** $\boxed{3}$

Partie 3 Injectivité de la transformation de Laplace

14. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction $s \mapsto f(s)\mathrm{e}^{-s}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ donc la fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g'(t) = f(t)\mathrm{e}^{-t}$$

car g est la primitive de $s \mapsto f(s)\mathrm{e}^{-s}$ qui s'annule en 0.
► **Fonction $s \mapsto f(s)\mathrm{e}^{-s}$ continue, g C^1 et $g'(t) = f(t)\mathrm{e}^{-t}$** $\boxed{3}$

15. Pour $t \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\left|g(t)\right| = \left|\int_0^t f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\right| \leqslant \int_0^t \left|f(s)\right|\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$$

de plus la fonction $s \mapsto |f(s)|\mathrm{e}^{-s}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puisque $f \in E$, on a donc :

$$\left|g(t)\right| \leqslant \int_0^{+\infty} \left|f(s)\right|\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \quad \text{(indépendant de } t\text{)}$$

Ceci montre que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.
► **Deux majorations, justification, conclusion** $\boxed{4}$

16. Soit $p>0$. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$ et elle est également bornée sur $\mathbb{R}^+$. D'après la question 10, g appartient à E donc $\mathscr{L}(g)(p)$ est bien défini. On a vu que g est de classe C^1 et g' est un élément de E puisque pour tout $p>0$, $t\mapsto g'(t)\mathrm{e}^{-pt}=f(t)\mathrm{e}^{-(p+1)t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On peut alors utiliser le résultat de la question 12 :

$$\mathscr{L}(g')(p)=p\mathscr{L}(g)(p)-g(0)$$

Par définition, $g(0)=0$. Ensuite :

$$\mathscr{L}(g')(p)=\int_0^{+\infty}g'(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\mathscr{L}(f)(p+1)$$

On a donc :

$$\mathscr{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathscr{L}(f)(p+1)$$

► **Bornée, $g\in E$, $g'\in E$, question 12, $g(0)=0$, calcul, conclusion** $\boxed{7}$

17. La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et pour $u\in\,]0,1]$, on a $-\ln(u)\in\mathbb{R}^+$, par composition φ est donc continue sur $]0,1]$. Il reste à montrer que φ est continue en 0 or pour $u\in\,]0,1]$:

$$\varphi(u)=g(-\ln(u))=\int_0^{-\ln(u)}f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s\xrightarrow[u\to0]{}\int_0^{+\infty}f(s)\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s=\varphi(0)$$

par définition d'une intégrale convergente et par composition des limites puisque $-\ln(u)\xrightarrow[u\to0]{}+\infty$. Par conséquent, φ est continue sur $[0,1]$.

► **$]0,1]$, limite, intégrale convergente, conclusion** $\boxed{4}$

18. On a déjà noté que $g\in E$. Pour $p>0$:

$$\mathscr{L}(g)(p)=\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$$

Dans cette intégrale convergente, on réalise le changement de variable $u=\mathrm{e}^{-t}$ de classe C^1 et bijectif sur $[0,+\infty[$ et on obtient :

$$\mathscr{L}(g)(p)=\int_0^{+\infty}g(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\int_1^0 g(-\ln u)u^p\frac{-1}{u}\,\mathrm{d}u=\int_0^1 g(-\ln u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u$$

► **C^1 bijectif, calcul, conclusion** $\boxed{3}$

19. Soit $n\in\mathbb{N}$, on pose $p=n+1>0$, d'après les questions précédentes :

$$\int_0^1\varphi(u)u^n\,\mathrm{d}u=\int_0^1\varphi(u)u^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathscr{L}(g)(p)=\frac{1}{p}\mathscr{L}(f)(p+1)=0$$

puisque par hypothèse $\mathscr{L}(f)=0$. Considérons maintenant $P\in\mathbb{C}[X]$ noté :

$$P=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$$

avec $d\in\mathbb{N}$ et $a_0,\ldots,a_d\in\mathbb{C}$, par linéarité de l'intégrale :

$$0=\sum_{k=0}^{d}a_k\int_0^1\varphi(u)u^k\,\mathrm{d}u=\int_0^1\varphi(u)P(u)\,\mathrm{d}u$$

► **Cas u^n, notation pour P, linéarité, conclusion** $\boxed{4}$

20. La fonction $\overline{\varphi}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc d'après le théorème admis il existe (P_n) suite de polynômes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0,1],\ \left|P_n(t) - \overline{\varphi(t)}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}$$

On a alors :

$$\left|P_n(t)\varphi(t) - |\varphi(t)|^2\right| = \left|\left(P_n(t) - \overline{\varphi(t)}\right)\varphi(t)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}\,|\varphi(t)|$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi^2(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \left|\left(P_n(t) - \overline{\varphi(t)}\right)\varphi(t)\right|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par encadrement :

$$\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

► Suite polynôme, majoration, intégration, encadrement, conclusion $\boxed{5}$

21. On a donc :

$$\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$ (question 19), donc :

$$\int_0^1 |\varphi(t)|^2\,\mathrm{d}t = 0$$

La fonction $|\varphi|^2$ est continue sur $[0,1]$, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, on a donc :

$$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = 0$$

On en déduit que :

$$\forall u \in\ ]0,1],\ g(-\ln u) = 0$$

et on a ainsi :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ g(t) = 0$$

La fonction g est donc nulle sur $\mathbb{R}^+$, il en est donc de même de sa dérivée et on en déduit que f est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, $f = 0$.

► $\int |\varphi|^2 = 0$, continue, positive, $\varphi = 0$, $g = 0$, $f = 0$ $\boxed{6}$

22. En première partie, on a démontré que $\mathscr{L}$ est linéaire et on vient d'établir que $\operatorname{Ker}\mathscr{L} = \{0\}$. On en déduit que $\mathscr{L}$ est injective.

► Linéaire, noyau, conclusion $\boxed{3}$

Sur l'ensemble de la copie :

► Présentation générale $\boxed{1}$

► Résultats en évidence $\boxed{1}$

► Utilisation précise du vocabulaire mathématique $\boxed{1}$

► Rédaction $\boxed{1}$