| | |
|---|---|
| **DS 2 – Durée 4h – Samedi 5 octobre 2022** | **PC*** |

**Les calculatrices sont interdites.**

Le sujet est constitué de deux problèmes indépendants. Pensez à laissez une marge sur les copies, au minimum 5 cm.

## Problème I

Soit $n_0$ un entier naturel fixé. Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} a_n$ une série convergente. On définit pour $n$ entier naturel supérieur ou égal à $n_0$ , $r_n$ son reste de rang $n$ : $r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} r_n$ dans trois exemples différents.

### Exemple 1

**1.** On pose pour $n \geqslant 0$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

Calculer $r_n$ puis montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n$ converge et calculer sa somme.

### Exemple 2

**2.** On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{1}{n^2}$.

Nous allons chercher un équivalent de $(r_n)$.

Soit $k$ un entier supérieur ou égal à 1.

**a.** Montrer que $\forall t \in [k, k+1]\,, \dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$.

**b.** En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$ et pour tout entier $N$ supérieur à 2 et à $n+1$, on a : $\sum\limits_{k=n+1}^{N} \dfrac{1}{(k+1)^2} \leqslant \displaystyle\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$.

**c.** En déduire que pour tout entier naturel non nul $n$, on a :
$$\frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}.$$

**d.** Donner alors un équivalent de $(r_n)$ lorsque $n$ est au voisinage de $+\infty$.
Que peut-on en conclure sur la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$ ?

**Exemple 3**

On pose pour $n \geqslant 1$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

**3.** Justifier la convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

**4.** Expression intégrale de $r_n$.

Soit $n$ un entier naturel non nul. On définit la suite $(I_n)$ par $I_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}\, x$.

**a.** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**b.** Montrer que $I_n = \ln 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k}$. On pourra calculer $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (-x)^k$.

**c.** En déduire la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, puis exprimer $r_n$ en fonction de $I_n$.

**5.** Conclusion

**a.** En utilisant une intégration par parties, montrer que l'on a :
$$I_n = \frac{(-1)^n}{a(n+1)} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 1 \text{ sont à déterminer.}$$

**b.** En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$.

**Exemple 4.** On pose pour tout $n \geqslant 0$, $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

**6.** Établir la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ et préciser sa somme.

**7.** Démontrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que, pour tout entier naturel $n$, $|r_n| \leqslant \dfrac{K2^{n+1}}{n+1!}$.

**8.** En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n$.

## Problème II

*Étant donnée une suite* $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ *à valeur réelles ou complexes, on définit pour* $n \geqslant n_0$ *:*

$$P_n = \prod_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0} u_{n_0+1} \cdots u_n$$

*On dit que le produit infini* $\displaystyle\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ *existe lorsque la suite* $(P_n)$ *converge vers une limite finie.*

*Lorsque c'est le cas, la valeur du produit infini est notée* $\displaystyle\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ *et elle vaut :*

$$\prod_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} P_n$$

### Partie 1 Questions préliminaires

**1.** Démontrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}$ existe et déterminer sa valeur.

**2.** Démontrer que les produits infinis suivants existent et déterminer leur valeur :

$$\prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$$

**3.** On considère les suites $(a_n)_{n \geqslant 1}$ et $(b_n)_{n \geqslant 1}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Étudier la nature des séries $\sum a_n$, $\sum a_n^2$, $\sum b_n$ et $\sum b_n^2$.

### Partie 2

*Dans cette partie, on considère une suite* $(u_n)_{n \geqslant 0}$ *à valeurs réelles et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$$

*Pour* $n \in \mathbb{N}$*, on note* $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$ *et* $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$.

**4.** Étudier la monotonie de la suite $(P_n)$.

**5.** Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

**6.** Montrer que $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} u_k \neq 0$ si, et seulement si, la série $\sum \ln u_n$ est convergente.

## Partie 3

*Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles et telle que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$$

*Pour $n \in \mathbb{N}$, on note*

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k), \quad Q_n = \prod_{k=0}^{n}(1-u_k), \quad S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k) \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1-u_k)$$

**7.** On suppose que le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.

(a) Montrer que la série $\sum \ln(1+u_n)$ est convergente.
(b) Démontrer que la suite $(u_n)$ converge et expliciter sa limite.
(c) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

**8.** Montrer que si la série $\sum u_n$ est convergente alors le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.

**9.** Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) Le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe ;
(ii) Le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe et est non nul.

## Partie 4

*Dans cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ à valeurs réelles vérifiant les conditions suivantes :*

- *$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| < 1$ ;*
- *La série $\sum u_n$ converge.*

*Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)$.*

**10.** Déterminer des réels $a$ et $b$ tels que $\ln(1+u_n) = au_n + bu_n^2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n^2)$.

**11.** Montrer que si la série $\sum u_n^2$ converge, alors le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et sa valeur est non nulle.

**12.** On suppose que la série $\sum u_n^2$ diverge. Que peut-on dire du produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ ?

**13.** Démontrer que les produits infinis suivants existent et déterminer s'ils sont nuls ou non :

$$\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right), \quad \prod_{k=2}^{+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}\right)$$

**14.** Que peut-on dire du produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{\cos(n^2\sqrt{2})}{4n^2}\right)$ ?

# Correction DS 2

**Sources. Problème 1 : CCP L2 2004. Problème 2 : Centrale 1 TSI 1981 adapté.**

## Problème II

### Partie 1 Questions préliminaires

1. On pose ici $u_n = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2^{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cette limite est finie, par définition le produit infini $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2}$ existe et vaut 0.

**► Calcul, limite nulle, conclusion** $\boxed{3}$

2. On pose $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$ et :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} u_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k}{\prod_{k=2}^{n} k} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cette limite est finie donc le produit infini $\displaystyle\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ existe et vaut 0.

**► Calcul, simplification, limite nulle, conclusion** $\boxed{4}$

On pose $u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$ pour $n \geqslant 2$ et :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} u_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} k \prod_{k=3}^{n+1} k}{\prod_{k=2}^{n} k^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{2n!^2} = \frac{n+1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Cette limite est finie, donc le produit infini $\displaystyle\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{2}$.

**► Définition, deux simplifications, limite, conclusion** $\boxed{5}$

On pose $u_n = 1 - \dfrac{2}{n(n+1)}$ pour $n \geqslant 2$ et :

$$P_n = \prod_{k=2}^{n} u_k = \prod_{k=2}^{n} \frac{k(k+1)-2}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k-2}{k(k+1)}$$

Pour procéder comme dans les exemples précédents, on factorise le numérateur. Le polynôme $x^2+x-2$ a pour racines 1 et $-2$ donc $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$ donc :

$$P_n = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+2)}{\prod_{k=2}^{n} k \prod_{k=2}^{n}(k+1)} = \frac{(n-1)!(n+2)!}{3n!(n+1)!} = \frac{n+2}{3n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

Cette limite est finie, donc le produit infini $\displaystyle\prod_{k=2}^{+\infty}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)$ existe et vaut $\dfrac{1}{3}$.

**► Définition, simplifications, limite, conclusion** $\boxed{6}$

3. On utilise le théorème des séries alternées :

- La suites $(-1)^n a_n$ et $(-1)^n b_n$ sont de signe constant négatif;
- $|a_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $|b_n| = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$|a_{n+1}| - |a_n| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leqslant 0$$
$$|b_{n+1}| - |b_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 0$$

car $n+1 \geqslant n$. Les suites $(|a_n|)$ et $(|b_n|)$ sont donc décroissantes.

D'après le théorème des séries alternées, les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

► **Trois hypothèses, justifications pour la dernière, deux conclusions** $\boxed{6}$

On a de plus :

$$a_n^2 = \frac{1}{n^2}$$
$$b_n^2 = \frac{1}{n}$$

La série $\sum a_n^2$ est une série de Riemann convergente, la série $\sum b_n^2$ est une série de Riemann divergente.

► **Deux calculs, deux conclusions** $\boxed{4}$

**Partie 2**

4. Par définition, pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$P_{n+1} - P_n = \prod_{k=0}^{n+1} u_k - \prod_{k=0}^{n} u_k = (u_{n+1} - 1) \prod_{k=0}^{n} u_k$$

Les $u_k$ sont positifs et $u_{n+1} - 1 \leqslant 0$ donc $P_{n+1} - P_n \leqslant 0$. La suite $(P_n)$ est donc décroissante.

► **Factorisation, justification, conclusion** $\boxed{3}$

5. La suite $(P_n)$ est décroissante. Elle est de plus à valeurs positive donc minorée par 0. Par conséquent, la suite $(P_n)$ converge. Par définition, le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ existe.

► **Minorée, convergente, conclusion** $\boxed{3}$

6. On note $\ell$ la valeur du produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ autrement dit :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} P_n$$

Comme la suite $(P_n)$ est positive, on a $\ell \geqslant 0$. Avec les notations de l'énoncé, on a $P_n = e^{S_n}$ donc $S_n = \ln(P_n)$.

**Supposons que** $\ell \neq 0$. On a alors $\ell > 0$ et par composition des limites :

$$S_n = \ln(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$$

Par définition, la série $\sum \ln(u_n)$ est convergente.

**Supposons que la série** $\sum \ln(u_n)$ **est convergente.** On note $S$ sa somme, on a par composition des limites :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = e^S > 0$$

et ainsi $\ell \neq 0$. **Conclusion.** La valeur du produit $\prod_{k=0}^{+\infty} u_k$ est non nulle si, et seulement si, la série $\sum \ln(u_n)$ converge.

► **Lien $P_n, S_n$ (1), série convergente ⇒ limite ≠ 0 (2), réciproque (3)** $\boxed{6}$

## Partie 3

7. (a) On note toujours $\ell$ la valeur du produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$. C'est la limite de la suite $(P_n)$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) \geqslant 1$$

(car c'est un produit de termes plus grands que 1). On a donc par composition des limites :

$$S_n = \ln(P_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$$

et cette limite est finie, donc par définition la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge.

► **$S_n = \ln(P_n)$, limite non nulle, conclusion** $\boxed{3}$

(b) D'après la question précédente, la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge. D'après le cours, on a :

$$\ln(1+u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

donc par composition des limites, la suite $(u_n)$ converge vers 0.

► **Condition nécessaire de convergence, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$** $\boxed{2}$

(c) D'après les questions précédentes, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

D'après les question précédentes, la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge.

► **Équivalent, justifié, comparaison SATP, conclusion** $\boxed{4}$

8. On suppose maintenant que la série $\sum u_n$ converge. Nécessairement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a donc :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \ln(1+u_n)$ converge. On note $S$ sa somme. Par composition des limites :

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\ln(1+u_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^S$$

et cette limite est finie. Par conséquent, si la série $\sum u_n$ converge, alors le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.

► **Équivalent, série $\sum \ln(1+u_n)$, composition, limite finie, conclusion** $\boxed{5}$

9. **On suppose que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe *(i)*.** D'après les questions précédentes, la série $\sum u_n$ converge. On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc :

$$\ln(1-u_k) \underset{n\to+\infty}{\sim} -u_k$$

Par comparaison de séries à termes de signe constant, la série $\sum \ln(1-u_k)$ est convergente. On note $T$ sa somme, on a alors par composition des limites :

$$Q_n = \prod_{k=0}^{n}(1-u_k) = \exp\left(\sum_{k=0}^{n}\ln(1-u_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^T$$

Cette limite est finie donc par définition le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe. Sa valeur est $e^S$ qui est non nulle.
**On suppose que le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1-u_k)$ existe et est non nul *(ii)*.** On note $\ell$ sa valeur, on a donc $\ell > 0$. Par composition des limites :

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1-u_k) = \ln(Q_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(\ell)$$

Par définition, la série $\sum \ln(1-u_k)$ converge. On a donc à nouveau $u_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ donc :

$$-\ln(1-u_k) \underset{k\to+\infty}{\sim} u_k$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_k$ converge et d'après les questions précédentes le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe.
**Conclusion.** On a l'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
▶ **Supp.** $\prod(1+u_k)$**,** $\sum u_n$**,** $\ln(1-u_k) \sim -u_k$**, comp. SAT**$\leqslant 0$**, composition** $\boxed{5}$
▶ **Supp.** $\prod(1-u_k)$ **et** $\neq 0$**, composition, équivalent, comparaison, conclusion** $\boxed{5}$

### Partie 4

10. Comme la série $\sum u_n$ converge, on a nécessairement $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On peut alors utiliser le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$ :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$$
$$\ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \underset{x\to0}{\mathrm{o}}(u_n^2)$$

On a donc $a = 1$ et $b = -1/2$.
▶ DL **de** $\ln(1+x)$**,** $a=1$**,** $b=-1/2$ $\boxed{2}$

11. On suppose que la série $\sum u_n^2$ converge et par hypothèse la série $\sum u_n$ converge. Le terme en $\mathrm{o}(u_n^2)$ est donc le terme général d'une série absolument convergente donc convergente. La série $\sum \ln(1+u_n)$ est donc convergente comme somme de séries convergentes. On note $S$ sa somme, on a par composition des limites :

$$P_n = e^{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^S$$

Par définition, le produit infini $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et sa valeur est $e^S \neq 0$.
▶ **Somme séries convergentes, composition, conclusion,** $\neq 0$ $\boxed{4}$

12. On suppose que la série $\sum u_n^2$ diverge. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ :

$$v_n = u_n - \ln(1+u_n)$$

On a toujours $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque la série $\sum u_n$ converge et ainsi :

$$v_n = u_n - \ln(1+u_n) = \frac{1}{2}u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(u_n^2)$$
$$\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}u_n^2$$

La série $\sum u_n^2$ diverge donc par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum v_n$ diverge. On a $\ln(1+u_n) = u_n - v_n$ donc :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \ln(1+u_k) = \sum_{k=0}^{n} u_n - \sum_{k=0}^{n} v_k$$

La série $\sum v_k$ est à termes positifs et divergente donc :

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

La série $\sum u_n$ est convergente, on a donc :

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Par composition des limites, on a :

$$P_n = \mathrm{e}^{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le produit infini $\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ existe et sa valeur est nulle.

▶ **Somme d'une série CV et d'une DV,** $\lim S_n = -\infty$**,** $\lim P_n = 0$**, conclusion** $\boxed{4}$

13. On applique ce qui précède avec :

$$\forall k \geqslant 2,\ u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

(on peut éventuellement poser $u_0 = u_1 = 0$ si l'on veut que la suite commence à 0). On a clairement $|u_k| < 1$ et on a vu que les séries $\sum u_k$ et $\sum u_k^2$ convergent. D'après ce qui précède, le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et sa valeur est non nulle. On pose ensuite :

$$\forall k \geqslant 2,\ u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$

On a là encore $|u_k| < 1$ et $\sum u_k$ converge mais $\sum u_k^2$ diverge. Par conséquent le produit $\prod_{k=0}^{+\infty}(1+u_k)$ existe et sa valeur est nulle.

▶ **2 raisonnements, 2 conclusions** $\boxed{6}$

14. Posons pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$u_n = -\frac{\cos(n^2\sqrt{2})}{4n^2}$$

On a alors $|u_n| < 1$. Par ailleurs :

$$|u_n| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$|u_n^2| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Comme $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$, par comparaison de séries à termes positifs, les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. D'après les question précédentes, le produit infini existe et sa valeur est non nulle.

# Problème I – CCP L2 2004, exercice 1 – Correction

**1.** Dans cette question, $a_n = 1/2^n$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ est une série géométrique convergente. Par définition de $r_n$ :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{+\infty} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 2 = \frac{1}{2^n}$$

La série $\sum_{n\geqslant 0} r_n$ est alors une série géométrique convergente puisque $0 < 1/2 < 1$ et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2$$

▶ $r_n = 1/2^n$ $\boxed{1}$
▶ $|1/2| < 1$ $\boxed{1}$
▶ **Série géométrique convergente** $\boxed{1}$
▶ $\sum_{n=0}^{+\infty} r_n = 2$ $\boxed{1}$

**2.a.** Soit $k \geqslant 1$ et soit $t \in [k, k+1]$. Alors $0 < k \leqslant t \leqslant k+1$ et en appliquant la fonction $x \mapsto x^{-2}$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ :

$$\forall t \in [k, k+1],\ \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

▶ **Fonction décroissante** $\boxed{1}$

**2.b.** On reprend la relation obtenue à la question précédente et on intègre de $k$ à $k+1$. Par croissance de l'intégrale :

$$\forall k \geqslant 1,\ \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

On considère $n \geqslant 1$, $N \geqslant n+1$ et on ajoute les inégalités précédentes pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

En regroupant les intégrales avec la relation de Chasles :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall N \geqslant N+1,\ \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

▶ **Croissance de l'intégrale** $\boxed{1}$ Ou intégration des inégalités
▶ **Ajouter les inégalités** $\boxed{1}$
▶ **Relation de Chasles** $\boxed{1}$

**2.c.** On calcule tout d'abord l'intégrale :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_{n+1}^{N+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1}$$

On en déduit l'encadrement pour $n \geqslant 1$ et $N \geqslant n+1$ :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2}$$

On fait maintenant tendre $N$ vers $+\infty$ et on obtient :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

La somme de droite est égale à $r_n$. Celle de gauche est égale à $r_{n+1}$ ou encore $r_n - 1/(n+1)^2$, donc :

$$r_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant r_n$$

En réordonnant ces inégalités, on obtient $\forall n \geqslant 1, \ \frac{1}{n+1} \leqslant r_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$.

▶ **Calcul des intégrales** $\boxed{1}$

▶ $N \to +\infty$ $\boxed{1}$

▶ **Encadrement de** $r_n$ $\boxed{1}$

**2.d.** On multiplie les inégalités précédentes par $n+1>0$ :

$$1 \leqslant (n+1)r_n \leqslant 1 + \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par encadrement, $(n+1)r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et ainsi :

$$r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} n^{-1}$ est divergente. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geqslant 1} r_n$ diverge.

▶ $r_n \sim 1/n$ $\boxed{1}$

▶ $\sum 1/n$ **diverge** $\boxed{1}$

▶ **Comparaison de séries à termes positifs** $\boxed{1}$

▶ $\sum r_n$ **diverge** $\boxed{1}$

**3.** La suite $((-1)^n a_n)_{n\geqslant 1}$ est de signe constant puisque $(-1)^n a_n = 1/n = |a_n|$. La suite $(|a_n|)_{n\geqslant 1} = (1/n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et converge vers 0. Par application du théorème des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n/n$ converge.

▶ $(-1)^n a_n$ **de signe constant** $\boxed{1}$

▶ $(|a_n|)$ **décroissante** $\boxed{1}$

▶ $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\boxed{1}$

▶ **Théorème des séries alternées et conclusion** $\boxed{1}$

**4.a.** Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n$ de sorte que par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On en déduit par encadrement $|I_n| = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et ainsi $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

▶ **Majoration de l'intégrale, Théorème d'encadrement** $\boxed{2}$

**4.b.** Pour $x \in [0,1]$, $-x \neq 1$ et on reconnait la somme des termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} - (-1)^n \frac{x^n}{1+x}$$

On intègre de 0 à 1 :

$$\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x - (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x)]_0^1 - I_n = \ln 2 - I_n$$

On utilise la linéarité de l'intégrale puis le changement d'indice $p = k+1$ :

$$\ln 2 - I_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p}$$

Finalement $I_n = \ln 2 + \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} = \ln 2 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$

▶ **Somme des termes d'une suite géométrique** 1

▶ **Intégrer** 1

▶ **Conclusion** 1

**4.c.** D'après les deux questions précédentes :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = I_n - \ln 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2$$

Par définition, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\ln 2.$ De plus, pour $n \geqslant 1$ :

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = -\ln 2 - (I_n - \ln 2) = -I_n$$

▶ $n \to +\infty$ 1

▶ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\ln 2$ 1

▶ $r_n = -I_n$ 1

**5.a.** Les fonctions $x \mapsto x^{n+1}$ et $x \mapsto (1+x)^{-1}$ sont de classe $\mathrm{C}^1$ sur $[0,1]$, on réalise une intégration par parties :

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{1}{1+x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{-1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

Par ailleurs, sachant que $(1+x)^2 \geqslant 1$ pour $x \in [0,1]$ :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+2}$$

On en déduit que :

$$0 \leqslant \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par conséquent $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et :

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

▶ **Choix des fonctions** 1

▶ **Fonctions de classe $\mathrm{C}^1$** 1

▶ **Réalisation de l'intégration par parties** $\boxed{1}$
▶ $a = 2$, $\alpha = 2$ $\boxed{1}$
▶ $\mathrm{O}(1/n^2)$ $\boxed{1}$
**5.b.** Sachant que $r_n = -I_n$, on a le développement :

$$r_n = u_n + v_n \quad \text{avec} \quad u_n = \frac{-(-1)^n}{2(n+1)} \quad \text{et} \quad v_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

La série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est absolument convergente donc convergente. La suite $((-1)^n u_n)$ est de signe constant et de plus :

$$|u_n| = \frac{1}{2(n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et la suite $(|u_n|)$ est décroissante. Par application du théorème des séries alternées, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge. La série $\sum_{n\geqslant 1} r_n$ est convergente comme somme de deux séries convergentes.
▶ $\sum 1/n^2$ **converge** $\boxed{1}$
▶ **Comparaison séries à termes positifs** $\boxed{1}$
▶ **Convergence absolue** $\boxed{1}$
▶ **Somme de deux séries convergentes** $\boxed{1}$
**6.** La série $\sum a_n$ est une série exponentielle, elle est donc convergente et sa somme est ici $\mathrm{e}^2$.
▶ **Série exp., somme** $\mathrm{e}^2$ $\boxed{2}$
**7.** La fonction exp est de classe $\mathrm{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de Taylor Lagrange appliquée à cette fonction donne :

$$\forall a \in I,\ \forall x \in I,\ \left|\exp(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{M|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

où $M$ est un majorant de $|\exp^{(n)}|$ sur $I$. Prenons $I = [0,2]$, alors $M = \mathrm{e}^2$ convient et en appliquant avec $a = 0$ et $x = 2$ on obtient :

$$\left|\exp(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} 2^k\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

La somme correspond au $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp, on a donc :

$$\left|\exp(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

autrement dit :

$$|r_n| \leqslant \frac{\mathrm{e}^2 2^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par conséquent, le réel $K = \mathrm{e}^2$ convient.
▶ **Taylor Lagrange : formule, hypothèses, application** $\boxed{3}$
▶ **Conclusion et** $K = \mathrm{e}^2$ $\boxed{2}$
**8.** La série exponentielle $\sum 2^n/(n+1)!$ converge, *a fortiori* la série $\sum 2^{n+1}/(n+1)!$ converge et, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum r_n$ converge absolument donc converge.
▶ **Référence, conclusion** $\boxed{2}$
**Sur l'ensemble de la copie :**
▶ **Présentation générale** $\boxed{1}$
▶ **Résultats en évidence** $\boxed{1}$
▶ **Utilisation précise du vocabulaire mathématique** $\boxed{1}$
▶ **Rédaction** $\boxed{1}$