DS 1 – Durée 2h – Samedi 15 septembre 2024	PC*

Les calculatrices sont interdites.

Pensez à laissez une marge sur les copies, au minimum 5 cm.

Problème I

Pour tout entier naturel n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_1 = 1$$
$$\textit{pour } n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$
$$\textit{pour } n \geqslant 1,\ v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction $(x \longmapsto x + \ln(1-x))$. Préciser son développement de Taylor à l'ordre 2 en 0.

2. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Quel est le signe de u_n ?

3. Déterminer un équivalent de u_n puis justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est absolument convergente.

4. Étudier la fonction $f : x \longmapsto x - \ln(1+x)$ sur $[0,1]$.

5. Déterminer un équivalent de v_n puis justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est convergente.

6. Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. Exprimer en fonction de n, $v_n - u_n$.

7. En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{n} (v_k - u_k)$ en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 3$.

8. On définit les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ en posant :

$$\text{pour } n \geqslant 1,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} v_k$$
$$b_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

9. Démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Dans la suite du problème, on note γ la somme de ces deux séries.

10. Démontrer que γ est dans l'intervalle $]0,1[$.

11. Démontrer que $h_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Problème II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on considère la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n-1 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n-1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus précisément, A_n est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j}$ tous nuls exceptés ceux donnés par :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \ a_{k+1,k} = n-k$$
$$a_{k,k+1} = k$$

1. La matrice A_2 est-elle inversible ? La matrice A_3 est-elle inversible ?

On considère l'espace $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ des polynômes coefficients réels de degré $\leqslant n-1$ et on note $\mathscr{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ la base canonique de E. Si $P(X) \in E$, la notation $P'(X)$ désigne le polynôme dérivé de $P(X)$. On définit l'application :

$$\varphi : P(X) \mapsto (n-1)XP(X) + (1-X^2)P'(X)$$

2. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\varphi(X^k)$.

3. Justifier que l'application φ est un endomorphisme de E.

4. Comparer la matrice de φ dans la base $\mathscr{B}$ avec la matrice A_n.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit le polynôme $P_k = (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}$.

5. Calculer $\varphi(P_k)$ et déterminer un réel λ_k tel que $\varphi(P_k) = \lambda_k P_k$.

Dans toute la suite de ce problème, on se place dans le cas particulier $n = 4$.

6. Démontrer que $\mathscr{B}' = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.

7. Déterminer la matrice A' de φ dans la base $\mathscr{B}'$.

8. On note P la matrice de passage P de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Donner une relation entre A', A_4 et P.

On considère l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & P^{-1}MP \end{array}$ *ainsi que les ensembles :*

$$\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \mid A_4 M = M A_4\} \quad \textit{et} \quad \mathscr{C}' = \left\{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \mid A'M = MA'\right\}$$

9. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

10. Démontrer que $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont des sous-espace vectoriels de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$.

11. Démontrer que pour une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on a l'équivalence :

$$M \in \mathscr{C} \iff f(M) \in \mathscr{C}'$$

12. Déterminer la dimension de $\mathscr{C}'$ et en déduire la dimension de $\mathscr{C}$.

13. Démontrer que la famille $(\mathrm{I}_4, A_4, A_4^2, A_4^3)$ est une base de $\mathscr{C}$.

Correction DS 1

Problème I

1. La fonction est définie sur $]-\infty,1[$. On a le développement limité usuel :

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

donc $\ln(1-x)=-x-\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$ et ainsi :

$$\boxed{x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)}$$

▶ **Domaine** $]-\infty,1[$ **1, DL** $\ln(1+x)$ **1, DL** $x+\ln(1-x)$ **1** $\boxed{3}$

2. **Attention :** la comparaison précédente n'est valable que quand $x\to0$, elle ne permet donc pas de déterminer le signe de u_n pour tout entier naturel $n\geqslant2$.
On sait que pour tout $x>-1$, $\ln(1+x)\leqslant x$, on a donc :

$$u_n=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}-\frac{1}{n}=0$$

On a donc pour tout $n\geqslant2$, $u_n\leqslant0$.
▶ **Majoration (ou étude de fonction) 2, conclusion 1** $\boxed{3}$

3. On utilise le développement obtenu à la première question :

$$u_n=-\frac{1}{2n^2}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{-1}{2n^2}$$
$$\boxed{|u_n|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n^2}}$$

La série $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente donc par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum u_n$ converge absolument.
▶ **Équivalent, référence, comparaison, SATP, conclusion** $\boxed{5}$

4. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$ et on a :

$$\forall x\in[0,1],\ f'(x)=\frac{x}{x+1}$$

En particulier, $f'(x)>0$ pour tout $x\in]0,1]$. On en déduit que f est strictement croissante sur $[0,1]$ et par ailleurs $f(0)=0$ et $f(1)=1-\ln(2)$.
▶ **Dérivable 1, monotonie (large) 1,** $f(0)=0$ **1** $\boxed{3}$

5. On utilise également le développement limité usuel de $\ln(1+x)$:

$$x-\ln(1+x)=x-\left(x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)=\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{\mathrm{o}}(x^2)$$

On a alors $v_n = \dfrac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et ainsi :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge donc par comparaison avec une série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge.

▶ **Équivalent 1, référence, comparaison, SATP, conclusion** $\boxed{5}$

6. On trouve :

$$v_n - u_n = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{n-1}{n} = \ln\frac{n}{n+1} + \ln\frac{n}{n-1} = \ln\frac{n^2}{(n-1)(n+1)}$$

▶ **Calcul pertinent 1, résultat simplifié 1** $\boxed{2}$

7. On met à part le premier terme dans cette somme. Pour les autres termes on utilise le résultat obtenu à la question précédente et les propriétés de ln :

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - u_k) = v_1 - u_1 + \sum_{k=2}^{n}\ln\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = -\ln(2) + \ln\frac{\prod_{k=2}^{n}k^2}{\prod_{k=2}^{n}(k-1)\prod_{k=2}^{n}(k+1)}$$

Les produits se simplifient en partie. On peut (par exemple) effectuer des changements d'indices et faire apparaitre des factorielles :

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - u_k) = -\ln(2) + \ln\frac{\prod_{k=2}^{n}k^2}{\prod_{k=1}^{n-1}k\prod_{k=3}^{n+1}k} = -\ln(2) + \ln\frac{n!\times n!\times 2}{(n-1)!(n+1)!} = -\ln(2) + \ln\frac{2n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(v_k - u_k) = \ln\frac{n}{n+1}$$

▶ **Premier terme, regrouper, simplifier, conclusion** $\boxed{4}$

8. Pour $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n+1} v_k - \sum_{k=1}^{n} v_k = v_{n+1} = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

en reprenant la notation f de la question 4. On a vu que f est croissante sur $[0,1]$ et $f(0)=0$ donc f est positive sur $[0,1]$ et ainsi $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$. La suite (a_n) est donc croissante. De même :

$$b_{n+1} - b_n = u_{n+1} \leqslant 0$$

car on a vu à la question 2 que $u_{n+1} \leqslant 0$ puisque $n+1 \geqslant 2$. La suite (b_n) est donc décroissante. Enfin, avec la question précédente :

$$a_n - b_n = \sum_{k=1}^{n}(v_k - u_k) = \ln\frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{car} \quad \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

On en déduit que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

▶ **Simplifier $a_{n+1} - a_n$, notation f, question 4, croissante** $\boxed{4}$

▶ **Simplifier $b_{n+1} - b_n$, décroissante** $\boxed{3}$

▶ **Simplifier $a_n - b_n$, limite** $\boxed{2}$

9. On a déjà vu que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Par définition :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n - \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} v_k - \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (v_k - u_k) = 0$$

(d'après la question précédente).

▶ **Définition, question précédente** $\boxed{2}$

10. La suite (a_n) est croissante et converge vers γ, on a donc $a_n \leqslant \gamma$ pour tout $n \geqslant 1$. Or :

$$a_1 = v_1 = 1 - \ln(2) > 0$$

On a donc $\gamma \geqslant a_1 > 0$. De même, la suite (b_n) est décroissante et converge vers γ donc $\gamma \leqslant b_n$ pour tout n. Or $b_1 = u_1 = 1$ donc $\gamma \leqslant 1$. Si on avait $\gamma = 1$, alors on aurait $\gamma \leqslant b_n \leqslant b_1 = 1$ pour tout n et donc la suite (b_n) serait constante. Ceci impliquerait que $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$ ce qui est impossible vu l'équivalent obtenu pour u_n à la question 3. Par conséquent, $\gamma < 1$.

▶ $\boldsymbol{\gamma \geqslant a_1, a_1 > 0}$ $\boxed{2}$

▶ $\boldsymbol{\gamma \leqslant b_n, \gamma \leqslant 1, \gamma < 1}$ $\boxed{3}$

11. Par définition, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$ ce que l'on peut également écrire :

$$\sum_{k=1}^{n} v_k = \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} v_k &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = h_n - \sum_{k=1}^{n} \ln\frac{k+1}{k} = h_n - \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \\
&= h_n + \sum_{k=1}^{n} \ln(k) - \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) = h_n + \ln(1) - \ln(n+1) = h_n - \ln(n+1) \\
&= h_n - \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = h_n - \ln(n) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = h_n - \ln(n) + \underset{n\to+\infty}{o}(1)
\end{aligned}$$

et on a donc finalement $h_n = \ln(n) + \gamma + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$.

Problème II

1. On a par définition :

$$A_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad \text{et} \quad \det(A_2) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Par conséquent, la matrice A_2 est inversible. Puis :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(A_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

car la première et la troisième ligne sont identiques, par conséquent A_3 n'est pas inversible.

▶ A_2 **inversible,** A_3 **non inversible, 2 justifications** $\boxed{4}$

2. On trouve directement $f(1) = (n-1)X$ puis :

$$\forall k \in [\![2, n-1]\!],\ f(X^k) = (n-1)X^{k+1} + (1-X^2)kX^{k-1} = (n-1)X^{k+1} + kX^{k-1} - kX^{k+1}$$

$$f(X^k) = (n-1-k)X^{k+1} + kX^{k-1}$$

► $k = 0$ **1,** $k \geqslant 1$ **2** $\boxed{3}$

3. On a tout d'abord pour $P, Q \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P + Q) &= (n-1)X(\lambda P + Q) + (1-X^2)(\lambda P' + Q') \quad \text{par linéarité de la dérivation}\\ &= \lambda((n-1)XP + (1-X^2)P') + ((n-1)XQ + (1-X^2)Q')\\ &= \lambda f(P) + f(Q)\end{aligned}$$

L'application f est donc linéaire. Soit $P \in E$, il reste à démontrer que $f(P) \in E$. On propose plusieurs rédactions possibles.
Méthode 1. On note P sous la forme :

$$P = aX^{n-1} + Q$$

avec $a \in \mathbb{R}$ et $\deg Q \leqslant n-2$. Alors par linéarité de f :

$$\begin{aligned}f(P) = af(X^{n-1}) + f(Q) &= a\big((n-1)X^n + (1-X^2)(n-1)X^{n-2}\big) + (n-1)XQ + (1-X^2)Q'\\ &= a(n-1)X^{n-2} + (n-1)XQ + (1-X^2)Q'\end{aligned}$$

On a $\deg(X^{n-2}) \leqslant n$, $\deg(XQ) \leqslant n-1$ et $\deg Q' \leqslant n-3$ donc $\deg((1-X^2)Q') \leqslant n-1$. Ainsi :

$$\deg(f(P)) \leqslant \max(\deg(X^{n-2}), \deg(XQ), \deg((1-X^2)Q')) \leqslant n-1$$

On en déduit que $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = E$.
Méthode 2. On note P sous la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$$

avec $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Par linéarité de f :

$$f(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f(X^k)$$

D'après les calculs effectués à la question précédente, on a pour $k < n-1$, $\deg f(X^k) \leqslant n-1$ et par ailleurs $f(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$. Ainsi, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f(X^k) \in E$ et on en déduit que $f(P) \in E$ comme combinaison linéaire d'éléments de E.
Par conséquent f est un endomorphisme de E.
► **Linéaire 1, écriture P 1, calcul $f(P)$ 1, majoration degré 2** $\boxed{5}$

4. Notons $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$. Comme $f(1) = (n-1)X$ et $f(X^{n-1}) = (n-1)X^{n-2}$, la première et la dernière colonne de M sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 0 \\ n-1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ n-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, la k-ième colonne de M s'obtient à partir des coefficients de $f(X^{k-1})$ et :

$$f(X^{k-1}) = (n-1-(k-1))X^k + (k-1)X^{k-2} = (n-k)X^k + (k-1)X^{k-2}$$

Or on a précisément avec les coefficients de A_n :

$$\begin{aligned} a_{k+1,k} &= n-k \\ a_{k-1,k} &= k-1 \end{aligned}$$

La k-ième colonne de M est donc la même que celle de A_n. On en déduit que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A_n$.

► Matrice A_n 1, justification convaincante 2 $\boxed{3}$

5. Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= (n-1)XP_k + (1-X^2)P_k' \\ &= (n-1)X(X-1)^k(X+1)^{n-1-k} \\ &\quad + (1-X^2)\left(k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-1-k} + (n-1-k)(X-1)^k(X+1)^{n-2-k}\right) \end{aligned}$$

et comme $1-X^2 = -(X-1)(X+1)$:

$$\begin{aligned} \varphi(P_k) &= (n-1)X(X-1)^k(X+1)^{n-1-k} - \left(k(X-1)^k(X+1)^{n-k} + (n-1-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-1-k}\right) \\ &= (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}((n-1)X - (k(X+1) + (n-1-k)(X-1))) \\ &= (X-1)^k(X+1)^{n-1-k}((n-1)X - ((n-1)X + 2k - n + 1)) \\ &= (n-1-2k)P_k \end{aligned}$$

On a donc $\lambda_k = n-1-2k$.

► Le calcul 2, $\lambda_k = n-1-2k$ 1 $\boxed{3}$

6. On considère une combinaison linéaire nulle :

$$\alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 = 0$$

avec $\alpha_0, \ldots, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, autrement dit :

$$\alpha_0(X+1)^3 + \alpha_1(X-1)(X+1)^2 + \alpha_2(X-1)^2(X+1) + \alpha_3(X-1)^3 = 0$$

On peut développer et traduire ceci par le fait que les coefficients soient nuls mais, plus simplement :

- En substituant 1 à X, on obtient $2^3\alpha_0 = 0$ donc $\alpha_0 = 0$;
- En substituant -1 à X, on obtient $(-2)^3\alpha_3 = 0$ donc $\alpha_3 = 0$;
- Il reste donc :

$$\alpha_1 \underbrace{(X-1)(X+1)^2}_{P_1} + \alpha_2 \underbrace{(X-1)^2(X+1)}_{=P_2} = 0$$

  Les deux polynômes P_2 et P_3 ne sont pas proportionnels, ils constituent par conséquent une famille libre donc $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Par conséquent, la famille $\mathscr{B}'$ est libre. De plus, les éléments de $\mathscr{B}'$ appartiennent à E et $\operatorname{card}\mathscr{B}' = 4 = \dim E$. On en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

► Libre 2 (1 pour la méthode), cardinal 1, conclusion 1 $\boxed{4}$

7. On a $\varphi(P_k) = (4-1-2k)P_k$ donc $\varphi(P_0) = 3P_0$, $\varphi(P_1) = P_1$, $\varphi(P_2) = -P_2$ et $\varphi(P_3) = -3P_3$. Par conséquent :

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

▶ Matrice A' $\boxed{2}$

8. D'après le cours, on a $P^{-1}A_4P = A'$.
▶ Formule $P^{-1}AP = A'$ $\boxed{1}$

9. Comme P est inversible (matrice de passage entre deux bases), l'application f est bien définie. Avec les propriétés du produit matriciel, on a pour $M_1, M_2 \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f(\lambda M_1 + M_2) = P^{-1}(\lambda M_1 + M_2)P = \lambda P^{-1}M_1 p + P^{-1}M_2P = \lambda f(M_1) + f(M_2)$$

L'application f est linéaire et par conséquent $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_4(\mathbb{R}))$.
▶ Linéaire $\boxed{1}$

10. On a par définition $\mathscr{C} \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et $\mathrm{I}_4 \in \mathscr{C}$ donc $\mathscr{C}$ n'est pas vide. Pour $M_1, M_2 \in \mathscr{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} A_4(\lambda M_1 + M_2) &= \lambda A_4 M_1 + A_4 M_2 \\ &= \lambda M_1 A_4 + M_2 A_4 \quad \text{car } M_1, M_2 \in \mathscr{C} \\ &= (\lambda M_1 + M_2)A_4 \end{aligned}$$

donc $\lambda M_1 + M_2 \in \mathscr{C}$. On en déduit que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$; c'est exactement pareil pour $\mathscr{C}'$.
▶ Non vide 1, poser une combinaison linéaire 1, vérification 1 $\boxed{3}$

11. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{C} &\iff A_4 M = MA_4 \\ &\iff PA'P^{-1}M = MPA'P^{-1} \quad \text{car } A_4 = PA'P^{-1} \\ &\iff A'P^{-1}MP = P^{-1}MPA' \quad \text{mult. à gauche par } P^{-1}\text{, à droite par } P \\ &\iff A'f(M) = f(M)A' \\ &\iff f(M) \in \mathscr{C}' \end{aligned}$$

On a donc l'équivalent $M \in \mathscr{C} \Leftrightarrow f(M) \in \mathscr{C}'$.
▶ Raisonnement, produits P, P^{-1}, conclusion $\boxed{3}$

12. Considérons une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on a :

$$A'M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m_{11} & 3m_{12} & 3m_{13} & 3m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ -m_{31} & -m_{32} & -m_{33} & -m_{34} \\ -3m_{41} & -3m_{42} & -3m_{43} & -3m_{44} \end{pmatrix}$$

$$MA' = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3m_{11} & m_{12} & -m_{13} & -3m_{14} \\ 3m_{21} & m_{22} & -m_{23} & -3m_{24} \\ 3m_{31} & m_{32} & -m_{33} & -3m_{34} \\ 3m_{41} & m_{42} & -m_{43} & -3m_{44} \end{pmatrix}$$

$$A'M = MA' \iff \forall (i,j) \in [\![1,4]\!]^2, i \neq j \implies m_{ij} = 0$$

Par conséquent :

$$\mathscr{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{pmatrix} \mid m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44} \in \mathbb{R} \right\}$$

On considère la base canonique (E_{ij}) de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on a alors :

$$\mathscr{C}' = \mathrm{Vect}(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$$

La famille $(E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{44})$ est génératrice de $\mathscr{C}'$ et est libre (car c'est une sous-famille d'une base de $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$) c'est donc une base de $\mathscr{C}'$. Par conséquent, $\dim \mathscr{C}' = 4$. Comme f réalise un isomorphisme de $\mathscr{C}$ sur $\mathscr{C}'$, on a également $\dim \mathscr{C} = 4$.

▸ **Raisonnement 2,** $\dim \mathscr{C}'$ **1,** $\dim \mathscr{C}$ **1** $\boxed{4}$

13. On pose $\mathscr{F} = (\mathrm{I}_4, A_4, A_4^2, A_4^3)$. On commence par montrer que cette famille est libre. On considère pour cela $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et on suppose :

$$a\mathrm{I}_4 + bA_4 + cA_4^2 + dA_4^3 = 0$$

On va établir que $a = b = c = d = 0$. On propose pour cela plusieurs méthodes.

Méthode 1 : calcul direct. On calcule tout d'abord :

$$A_4^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 6 \\ 21 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 20 & 0 & 21 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

puis pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

$$a\mathrm{I}_4 + bA_4 + cA_4^2 + dA_4^3 = \begin{pmatrix} a+3c & b+7d & 2c & 6d \\ 3b+21d & a+7c & 2b+20d & 6c \\ 6c & 2b+20d & a+7c & 3b+21d \\ 6d & 2c & b+7d & a+3c \end{pmatrix} = 0$$

Une matrice est nulle si, et seulement si, ses coefficients sont nuls, on obtient alors directement $a = b = c = d = 0$.

Méthode 2 : en utilisant la matrice A'. On part de :

$$a\mathrm{I}_4 + bA_4 + cA_4^2 + dA_4^3 = 0$$

On multiplie à gauche par P^{-1} et à droite par P, on obtient :

$$a\mathrm{I}_4 + bA' + cA'^2 + dA'^3 = 0$$

On a donc :

$$\begin{pmatrix} a+3b+3^2c+3^3d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a+b+c+d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b+c-d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+(-3)b+(-3)^2c+(-3)^3d \end{pmatrix} = 0$$

Considérons le polynôme $Q(X) = a + bX + cX^2 + dX^3 = 0$. D'après ce qui précède, $Q(3) = Q(1) = Q(-1) = Q(-3) = 0$ donc Q possède quatre racines distinctes et comme $\deg Q \leqslant 3$ on a $Q = 0$ donc $a = b = c = d = 0$.

Conclusion. La famille $\mathscr{F}$ est libre. Pour tout entier k, on a $A_4^k A_4 = A_4^{k+1} = A_4 A_4^k$ donc $A_4^k \in \mathscr{C}$. En particulier, $\mathrm{I}_4, A_4, A_4^2, A_4^3$ appartiennent à $\mathscr{C}$. De plus, $\operatorname{card} \mathscr{F} = 4 = \dim \mathscr{C}$ donc $\mathscr{F} = (\mathrm{I}_4, A_4, A_4^2, A_4^3)$ est une base de $\mathscr{C}$.

► Éléments de $\mathscr{C}$ 1, cardinal 1, méthode libre 1, calculs 2 $\boxed{5}$

Sur l'ensemble de la copie :

► Présentation générale $\boxed{1}$

► Résultats en évidence $\boxed{1}$

► Rédaction $\boxed{1}$

► Utilisation précise du vocabulaire mathématique $\boxed{1}$

Commentaires sur le problème I.

- **(1)** **Il faut connaitre le** $\mathrm{DL}_2(0)$ **de** $\ln(1+x)$ **(et plus généralement les** DL_n **des fonctions usuelles) et savoir l'appliquer à** $\ln(1+1/n)-1/n$ **et** $\ln(1-1/n)+1/n$**.**
- **(2)** **L'inégalité** $\ln(1+x)\leqslant x$ **valable pour tout** $x>-1$ **est au programme de première année, elle doit être connue et elle peut être utilisée pour traiter cette question. Sinon on étudie la fonction** $x\mapsto x-\ln(1-x)$ **de manière à pouvoir obtenir son signe pour** $x=1/n$**.**
- **(3)**
- **(4)**
- **(5)** **Quand l'énoncé demande les variations d'une fonction, rédigez en une phrase le sens de variations obtenu en précisant si c'est strict ou large (le tableau seul peu sembler ambigü).**
- **(6)**
- **(7)** **Il y a beaucoup trop souvent des problèmes de calculs. Vous perdez non seulement les points de la question concernée mais il est très probable que vous perdiez également beaucoup de points par la suite puisque les valeurs qui permettraient d'avancer ne sont pas celles que vous avez.**
- **(8)** **Pour démontrer que deux suites sont adjacentes, il ne faut pas démontrer qu'elles convergent vers la même limite. Ceci est la conclusion du théorème : si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite. Ce n'est pas dans la définition de suites adjacentes.**

Remarques sur le problème II.

- **(1)**
- **(2)** **Dans le calcul de** $\varphi(X^k)$**, on peut considérer que** $k=0$ **est un cas à part (la formule** $(X^k)'=kX^{k-1}$ **est un peu douteuse pour** $k=0$**). Je vous conseille de traiter** $k=0$ **à part (et de l'utiliser pour vérifier que votre formule générale est bien valable).**