DM 7 pour le ??? — PC*

https://www.concours-commun-inp.fr/fr/epreuves/annales/annales-pc.html

- CCINP PC 2024 Exercice 1 sans Q5, Q6, Q7 – Réduction et algèbre linéaire.
- CCINP PC 2024 Exercice 2 – Séries de fonctions.
- CCINP PC 2023 Exercice 2 – Intégrales à paramètres et séries de fonctions.
- CCINP PC 2022 Exercice 1 – Réduction et endomorphisme sur les polynômes.
- CCINP PC 2022 Exercice 3 – Séries, séries de fonctions, intégrales à paramètres.
- CCINP PC 2021 Exercice 3 – Mélange suites, suites de fonctions et réduction des matrices.

  ⚠ Ce sujet ne peut pas être entièrement traité pour l'instant car la question 32 nécessite un chapitre qui n'a pas encore été vu en classe.

  Vous pouvez soit attendre que le chapitre ait été fait (première semaine à la rentrée), soit admettre le résultat suivant (appelé *théorème spectral*) :

  > Pour toute matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et réelle, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :
  > (1) La matrice $P^{-1}SP$ est diagonale (ce qui signifie donc que S est diagonalisable) ;
  > (2) On a l'égalité $P^{-1} = P^{\top}$ (on dit alors que la matrice P est orthogonale).

- CCINP PC 2020 Exercice 1 – Intégrales à paramètres.
- CCINP PC 2019 Exercice 2 Partie I – Séries entières.

Quand les chapitres de probabilités auront été traités :

- CCINP PC 2022 Exercice 2.
- CCINP PC 2020 Exercice 3.
- CCINP PC 2019 Exercice 3.

Quelques conseils :

- **Ne cherchez pas ces sujets comme des DS ou des sujets de concours. Passez-y du temps pour proposer des réponses justes et pertinentes.**
- **Révisez les chapitres concernés *avant* de traiter le sujet. Ne traitez pas le sujet avec le chapitre sous les yeux.**
- **Seulement après avoir traité le sujet, regardez le corrigé et comparez avec ce que vous avez fait. Déterminez si vous votre réponse est pertinente et si les arguments sont au complet.**
- **Toujours une fois le sujet terminé, allez regarder le rapport du jury, disponible sur le site de concours avec les sujets. Notez les commentaires et les conseils donnés.**

CCINP PC 2024 Exercice 1 – Correction

CCP PC 2024. Exercice 1. Q1. On détermine le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & -12 \\ -1 & 5-x \end{vmatrix} = (4-x)(5-x)-12 = (x-4)(x-5)-12 = x^2-9x+8 = (x-1)(x-8)$$

Ainsi, χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{1,8\}$ donc il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \mathrm{diag}(1,8)$.

Q2. Soit $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Raisonnement par équivalences :

$$B^3 = A \iff B^3 = PDP^{-1} \iff P^{-1}B^3P = D \iff (P^{-1}BP)^3 = D \iff \Delta^3 = D$$

avec $\Delta = P^{-1}BP$. Par conséquent, B est une racine cubique de A si, et seulement si, Δ est une racine cubique de D.

Q3. On suppose que $\Delta^3 = D$. On a alors :

$$D\Delta = \Delta^3\Delta = \Delta^4 = \Delta\Delta^3 = \Delta D$$

donc D et Δ commutent. On note $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a :

$$D\Delta - \Delta D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7b \\ 7c & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\Delta D = D\Delta$, on en déduit que $b = c = 0$ donc Δ est diagonale.

Q4. On poursuit la question précédente avec $\Delta^3 = D$ et Δ diagonale. On a :

$$\Delta^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & d^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

donc $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$. La fonction $x \mapsto x^3$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc $a = 1$ et $d = 2$. Ainsi, $\Delta = \mathrm{diag}(1,2)$. Réciproquement, cette matrice vérifie bien $\Delta^3 = D$. La matrice D possède une unique racine cubique, c'est la matrice $\mathrm{diag}(1,2)$. D'après la question 2, la matrice A possède une unique racine cubique, c'est la matrice $B = P\Delta P^{-1} = P\,\mathrm{diag}(1,2)P^{-1}$.

Q5. On reconnait que M est la matrice dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ de la rotation vectorielle d'angle θ.

Q6. On pose :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta/3) & -\sin(\theta/3) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

alors R est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'angle $\theta/3$. Par conséquent, R est une racine cubique de M.

Q7. On suppose $N \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ et $\det N = -1$. D'après le cours, l'application linéaire canoniquement associée à N est une isométrie de $\mathbb{R}^2$ (muni du produit scalaire canonique) et $\det f = -1$ donc f est une réflexion de $\mathbb{R}^2$. On a alors $f^2 = \mathrm{id}$ donc $f^3 = f$ et ainsi $N^3 = N$. Par conséquent, N est une racine cubique de N.

Q8. La fonction $x \mapsto x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc la matrice $H_p(\lambda^{1/3})$ est une racine cubique de $H_p(\lambda)$.

Q9. La matrice A est diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_d$. On note $m_1,\dots,m_d$ leurs multiplicités respectives qui sont aussi les dimensions des sous-espaces propres associés. Il existe alors $P\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}AP = \mathrm{diag}(H_{m_1}(\lambda_1),\dots,H_{m_d}(\lambda_d))$$

(matrice diagonale par blocs). La matrice :

$$B = P\,\mathrm{diag}(H_{m_1}(\lambda_1^{1/3}),\dots,H_{m_d}(\lambda_d^{1/3}))P^{-1}$$

est alors une racine cubique de A. Par conséquent, la matrice A admet une racine cubique.
Q10. On suppose A inversible. En reprenant les notations précédentes, on a $\det(A) = \lambda_1^{m_1}\cdots\lambda_d^{m_d}$. Comme $\det A \neq 0$, les réels $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ sont tous non nuls.
Q11. On sait que λ est non nul donc $\rho > 0$. On a :

$$\begin{aligned} z^3=\lambda &\iff z^3=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \iff \left(\frac{z}{\rho^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/3}}\right)=1\\ &\iff \frac{z}{\rho^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/3}}\in\mathbb{U}_3\\ &\iff \exists k\in[\![0,2]\!],\ \frac{z}{\rho^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/3}}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3}\end{aligned}$$

$$z^3=\lambda \iff \exists k\in[\![0,2]\!],\ z=\rho^{1/3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/3}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/3}$$

Q12. D'après la question précédente, pour $k\in[\![1,d]\!]$, l'équation $z^3=\lambda_k$ possède trois racines complexes distinctes. On les note a_k, b_k, c_k. On a alors :

$$X^3-\lambda_k=(X-a_k)(X-b_k)(X-c_k)$$

et ainsi :

$$Q(X)=\prod_{k=1}^{d}(X-a_k)(X-b_k)(X-c_k)$$

Ce polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$. Ses racines sont distinctes car :

- Les a_k, b_k, c_k sont distincts ;
- Pour $k\neq j$, Les a_j, b_j, c_j sont distincts des a_k, b_k, c_k car les cubes des premiers valent λ_j, les cubes des derniers valent λ_k et $\lambda_j\neq\lambda_k$.

Par conséquent, Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$.
Q13. La matrice A est diagonalisable de valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_d$ donc le polynome :

$$P(X)=\prod_{k=1}^{d}(X-\lambda_k)$$

Q est annulateur de A. On suppose que A possède une racine cubique B, alors $B^3=A$ donc :

$$P(A)=0=P(B^3)=\prod_{k=1}^{d}(B^3-\lambda_k)=Q(B)$$

Le polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ et annulateur de B. Par conséquent, B est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

CCINP PC 2024 Exercice 2 – Correction

CCP PC 2024. Exercice 2. Q14. Soit $x > 0$, on utilise un développement limité :

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = x\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$\text{et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

donc par comparaison avec une série à termes positifs la série $\sum u_n(x)$ converge. Par conséquent la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Q15. Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction u_n est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ par composition. On a de plus :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x > 0,\ u_n'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{x}{n}} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

Remarque. L'énoncé pose une question supplémentaire concernant une suite (ε_n). Le but de cette question est d'aider ensuite à obtenir une majoration indépendante de x (qui sinon n'est pas simple à obtenir). *Il faut comprendre que ε_n ne doit pas dépendre de x.*
Pour répondre à la question de l'énoncé, le plus simple est de poser :

$$\varepsilon_n = u_n'(x) - \frac{x}{n(n+x)}$$

puis simplifier. On obtient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} - \frac{x}{n(n+x)} = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{n+x}{n(n+x)}\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\end{aligned}$$

On dispose bien d'une valeur ε_n indépendante de x. De plus avec un développement limité :

$$\varepsilon_n = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc par comparaison avec une série à termes positifs la série $\sum \varepsilon_n$ converge absolument.

Q16. Soient $b > a > 0$. On a :

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall x \in [a,b],\ \left|u_n'(x)\right| \leqslant \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n| \leqslant |\varepsilon_n| + \frac{b}{n(n+a)} \leqslant |\varepsilon_n| + \frac{b}{n^2}$$

On a donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ \left\|u_n'\right\|_{\infty,[a,b]} \leqslant \frac{b}{n^2} + \varepsilon_n \quad \text{et} \quad \sum \frac{b}{n^2} + \varepsilon_n \text{ converge}$$

(somme de séries convergentes). Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|u_n'\|_{\infty,[a,b]}$ converge donc la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a,b]$.

Remarque : on voit bien l'utilisation de ε_n qui permet d'obtenir facilement une majoration indépendante de x.

Q17. On vérifie chaque point constituant les conditions (C).

(i) **Ce point est facile à vérifier.** D'après les questions précédentes et le théorème de classe C^1 pour les séries de fonctions, la somme de la série de fonctions $\sum u_n$ est de classe C^1 sur $[a,b]$ donc φ est de classe C^1 sur $[a,b]$. Ceci est vrai pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc φ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(ii) **Ce point demande un calcul** qu'il faut effectuer soigneusement. Il faut bien faire apparaitre le télescopage et bien justifier.
Soit $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\varphi(x+1) - \varphi(x) &= -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) \\
&= -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{n+1}{n} - \ln\frac{x+n+1}{n} + \ln\frac{x+n}{n}\right) \\
&= -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{x+n}{n} - \ln\frac{x+n+1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

Or pour $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\ln\frac{x+n}{n} - \ln\frac{x+n+1}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\ln\frac{x+n}{n} - \sum_{n=1}^{N}\ln\frac{x+n+1}{n+1} = \sum_{n=1}^{N}\ln\frac{x+n}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\ln\frac{x+n}{n} \\
&= \ln(x+1) - \ln\frac{x+N+1}{N+1} \\
&\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(x+1)
\end{aligned}$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\frac{x+n}{n} - \ln\frac{x+n+1}{n+1}\right) = \ln(x+1)$ puis :

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(x+1) = \ln(x)$$

(iii) **Il faut éviter de dériver** (ce qui demanderait d'utiliser le théorème de dérivation pour les séries de fonctions) pour montrer que φ' est croissante.
Avec la question précédente :

$$\forall x > 0,\ \varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}\right)$$

Considérons $y > x > 0$, on a :

$$-\frac{1}{y} \geqslant -\frac{1}{x}$$
$$\forall n \geqslant 1,\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+y} \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}$$

En ajoutant ces inégalités, on obtient :

$$\varphi'(y) \geqslant \varphi'(x)$$

On en déduit que φ' est croissante.

(iv) **Ce point est facile à obtenir.**
Par définition :

$$\varphi(1) = -\ln 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = 0$$

Par conséquent, la fonction φ vérifie les conditions (C).

Q18. Pour $x > 0$:

$$h(x+1) - h(x) = \varphi(x+1) - g(x+1) - \varphi(x) + g(x) = \ln(x) - \ln(x) = 0$$

La fonction h étant de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ comme différence de deux fonctions de classe C^1, on peut dériver l'égalité précédente et obtenir $h'(x+1)-h'(x)=0$ pour tout $x>0$.
Q19. Remarque : cette question, ainsi que les deux suivantes, sont assez délicates.
Soient $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On a $p \leqslant p+x \leqslant p+1$ et comme φ' et g' sont croissantes :

$$\begin{aligned} \varphi'(p) &\leqslant \varphi'(x+p) \\ g'(x+p) &\leqslant g'(1+p) \\ -g'(1+p) &\leqslant -g'(x+p) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\varphi'(p)-g'(1+p) \leqslant \varphi'(x+p)-g'(x+p) = h'(x+p)$$

puis sur le même principe :

$$h'(x+p) = \varphi'(x+p)-g'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p)-g'(p)$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \forall x>0,\ \varphi(x+1)-\varphi(x) &= \ln x \\ g(x+1)-g(x) &= \ln(x) \end{aligned}$$

et les fonctions φ et g sont de classe C^1 donc en dérivant :

$$\begin{aligned} \forall x>0,\ \varphi'(x+1)-\varphi'(x) &= \frac{1}{x} \\ g'(x+1)-g'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Alors pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\varphi'(p)-g'(1+p) = \varphi'(p+1)-\frac{1}{p}-g'(1+p) = h'(1+p)-\frac{1}{p}$$

et sur le même principe :

$$\varphi'(1+p)-g'(p) = \varphi'(p)+\frac{1}{p}-g'(p) = h'(p)+\frac{1}{p}$$

Partant de :

$$\varphi'(p)-g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p)-g'(p)$$

on en déduit :

$$h'(p)-\frac{1}{p} \leqslant h'(x+p) \leqslant h'(p)+\frac{1}{p}$$

d'où :

$$-\frac{1}{p} \leqslant h'(x+p)-h'(p) \leqslant \frac{1}{p}$$

et de manière équivalente :

$$\left|h'(x+p)-h'(p)\right| \leqslant \frac{1}{p}$$

Q20. Tout d'abord, avec la relation $h'(x+1) = h'(x)$, on a par récurrence :

$$\forall p \in \mathbb{N},\ \forall x > 0,\ h'(x+p) = h'(x)$$

et également :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ h'(p) = h'(1)$$

Considérons $x \in]0,+\infty[$. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \left|h'(x) - h'(1)\right| = \left|h'(x+p) - h'(p)\right| \leqslant \frac{1}{p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$$

On en déduit que $h'(x) = h'(1)$. La fonction h' est donc constante sur $]0,+\infty[$.

Q21. Par conséquent, la fonction h est affine sur $]0,+\infty[$. Il existe alors $a, b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x > 0$, $h(x) = ax + b$. Toujours avec la question 18, on a :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ h(p) = h(1)$$

La suite $(h(p))$ est donc constante or $h(p) = ap + b$. Par conséquent, $a = 0$. Par ailleurs, $h(1) = 0$ donc $b = 0$. On en déduit que la fonction h est nulle sur $]0,+\infty[$ et ainsi $\varphi = g$.

Q22. **Remarque :** la relation à obtenir est donnée dans l'énoncé. Pour travailler avec un maximum de rigueur il faut privilégier une démonstration par récurrence.

On peut commencer par calculer :

$$\exp\left(u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right) = \exp\left(\ln\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \ln\frac{2n+1}{2n}\right) = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

On procède par récurrence sur $N \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $N = 1$:

$$\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\cdot\frac{2^{2N}N!^2}{(2N)!} = \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{4}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \exp\left(u_1\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

- Supposons l'égalité vraie au rang N. On a alors :

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(u_{N+1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N+1} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right)\\
&= \sqrt{\frac{N+2}{N+1}}\cdot\frac{2N+2}{2N+3}\cdot\frac{\sqrt{N+1}2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!}\\
&= \frac{2N+2}{2N+3}\cdot\frac{\sqrt{N+2}2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!} = \frac{(2N+2)^2}{(2N+3)(2N+2)}\cdot\frac{\sqrt{N+2}2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!}\\
&= \frac{2^2(N+1)^2}{(2N+3)(2N+2)}\cdot\frac{\sqrt{N+2}2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!}
\end{aligned}$$

  Et c'est bien le résultat au rang $N+1$.

Q23. Par définition :

$$\psi(1) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \varphi(1) - \frac{1}{2}\ln\pi = \varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln\pi$$

Or :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} + \lim_{N\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{N+1}\,2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!}$$

Formule de Stirling :

$$\begin{aligned}
N! &\underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi N}\frac{N^N}{\mathrm{e}^N}\\
N!^2 &\underset{N\to+\infty}{\sim} 2\pi N\frac{N^{2N}}{\mathrm{e}^{2N}}\\
(2N)! &\underset{N\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{\pi N}\frac{(2N)^{2N}}{\mathrm{e}^{2N}} = 2\sqrt{\pi N}\frac{2^{2N}N^{2N}}{\mathrm{e}^{2N}}\\
\frac{N!^2}{(2N)!} &\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{N}}{2^{2N}}\\
\frac{2^{2N}N!^2}{(2N)!} &\underset{N\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\sqrt{N}\\
\frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\cdot\frac{2^{2N}N!^2}{(2N)!} &\underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

On aura donc :

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\frac{1}{2} + \lim_{N\to+\infty} \ln\frac{\sqrt{N+1}\,2^{2N}N!^2}{(2N+1)(2N)!} = -\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\ln\pi$$

et ainsi $\psi(1) = 0$.

Q24. Ceci revient à montrer que :

$$\forall x > 0,\ \psi(x) = \varphi(x)$$

Par unicité (partie II), il suffit de vérifier que ψ vérifie également les conditions (C). La fonction ψ est de classe C^1 comme combinaison linéaire de fonctions de classe C^1. Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\psi(x+1) - \psi(x) &= x\ln 2 + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - (x-1)\ln 2 - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right)\\
&= \ln 2 + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \varphi\left(\frac{x}{2}+1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\frac{x}{2}\\
&= \ln x
\end{aligned}$$

et :

$$\psi'(x) = \ln 2 + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Cette fonction est croissante comme somme de fonctions croissantes. On a vu à la question précédente que $\psi(1) = 0$. Par conséquent, ψ vérifie les conditions (C) et par unicité $\psi = \varphi$ d'où le résultat.

CCINP PC 2023 Exercice 2 – Correction

CCP PC 2024 Exercice 2. Q14. Pour $(t,x) \in]0,+\infty[\times]-\infty,1]$, on a $t>0$ donc $e^t>1$ et $x \leqslant 1$ donc $e^t - x > 0$ donc $f(t,x)$ est bien défini. Par conséquent, la fonction f est bien définie sur $]0,+\infty[\times]-\infty,1]$.

Q15. On a pour $t>0$:

$$f(t,1) = \frac{t}{e^t - 1}$$

La fonction $t \mapsto f(t,1)$ est continue par morceaux et positive sur $]0,+\infty[$. Avec les équivalents usuels :

$$f(t,1) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 1 \quad \text{et} \int_0^1 1\,dt \text{ converge}$$
$$f(t,1) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{t}{e^t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,1]$, sur $[1,+\infty[$ et donc finalement $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q16. Pour $t>0$ et $x \leqslant 1$, on a :

$$0 < e^t - 1 \leqslant e^t - x$$

et ainsi :

$$0 \leqslant \frac{t}{e^t - x} \leqslant \frac{t}{e^t - 1}$$

La fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. La fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ donc par comparaison de fonctions positives, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q17. Remarque : petite difficulté ici car il faut gérer le x qui est apparu devant l'intégrale. On propose deux méthodes :

- soit on applique le théorème de classe C^1 avec le x dans l'intégrale. Il faut alors faire attention pour mettre en place l'hypothèse de domination;
- soit on applique le théorème de classe C^1 sur l'intégrale sans le x et il faut ensuite considérer que l'on a un produit de fonctions continues.

On donne ci-dessous les deux méthodes.

Méthode 1. On travaille directement sur :

$$L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{xt}{e^t - x}\,dt$$

On considère un réel $a>0$. Pour $x \in [-a,1]$, on a :

$$|x| \leqslant 1 \quad \text{si } x \geqslant 0$$
$$|x| \leqslant a \quad \text{si } x < 0$$

Pour majorer simplement, on peut remarquer que dans tous les cas, on a $|x| \leqslant 1+a$. On a les résultats suivants.

- Pour tout $t>0$, la fonction

$$x \mapsto f(t,x) = \frac{xt}{e^t - x}$$

  est continue sur $]-\infty,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

- Avec la question précédente, on a la majoration :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \forall x \in [-a,1],\ \left|\frac{xt}{e^t - x}\right| = \frac{|x|t}{e^t - x} \leqslant (1+a)\frac{t}{e^t-1} = (1+a)f(t,1)$$

  et la fonction $t \mapsto (1+a)f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par application du théorème de continuité, la fonction L est continue sur $[-a,1]$. Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$.

Méthode 2. On définit pour $x \in]-\infty,1]$:

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t,x)\,\mathrm{d}t$$

de sorte que $L(x) = xF(x)$. On a les résultats suivants.

- Pour tout $t>0$, la fonction

$$x \mapsto f(t,x) = \frac{t}{e^t - x}$$

  est continue sur $]-\infty,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
- Avec la question précédente, on a la majoration :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \forall x \in]-\infty,1],\ \left|f(t,x)\right| = \frac{t}{e^t - x} \leqslant \frac{t}{e^t-1} = f(t,1)$$

  et la fonction $t \mapsto f(t,1)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par application du théorème de continuité, la fonction F est continue sur $]-\infty,1]$. Par conséquent, la fonction L est continue sur $]-\infty,1]$ comme produit de fonctions continues.

Q18. Pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction s_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Par croissances comparées, comme $n+1>0$:

$$|s_n(t)| \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives, s_n est intégrable sur $[1,+\infty[$ puis intégrable sur $[0,+\infty[$. On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} u(t) &= t & u'(t) &= 1 \\ v'(t) &= e^{-(n+1)t} & v(t) &= \frac{-1}{n+1}e^{-(n+1)t} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} &u(0)v(0) = 0 \\ &u(t)v(t) = -\frac{1}{n+1}te^{-(n+1)t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \end{aligned}$$

On peut donc réaliser une intégration par parties dans l'intégrale convergente et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = x^n \lim_{t\to+\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0) + \frac{x^n}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}\left[e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$$

Q19. Pour $t>0$, la série $\sum x^n \mathrm{e}^{-nt}$ est géométrique de raison $x\mathrm{e}^{-t}$ et $|\mathrm{e}^{-t}|<1$. Elle est donc convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(n+1)t} = \mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-nt} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-x\mathrm{e}^{-t}} = \frac{1}{\mathrm{e}^t - x}$$

Ainsi, $\sum s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et :

$$\boxed{\forall t>0,\ \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x} = f(t,x)}$$

Q20. Comme $x \in [-1,1]$:

$$\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge absolument donc converge.
On a les points suivants.

- La série de fonctions $\sum s_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.
- Chaque fonction s_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{|x^n|}{(n+1)^2} \leqslant \frac{|x|^n}{n^2}$$

  donc la série $\sum \int_0^{+\infty} |s_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

D'après le théorème d'échange série intégrale avec convergence dominée :

$$\boxed{L(x) = \int_0^{+\infty} x f(t,x)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} x \int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}}$$

Q21. Pour $x \in [-1,1]$, avec la question précédente :

$$\begin{aligned}
L(x) + L(-x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (1+(-1)^n)\frac{x^n}{n^2} \\
&= \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} 2\frac{x^n}{n^2} \quad \text{car } 1+(-1)^n = 0 \text{ si } n \text{ impair} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} 2\frac{x^{2k}}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{k^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{L(x) + L(-x) = \frac{1}{2} L(x^2)}$$

Q22. On a (relation donnée dans l'énoncé)

$$\boxed{L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

donc avec la question précédente $\boxed{L(-1) = -\frac{1}{2}L(1) = -\frac{\pi^2}{12}}$.

Q23. La fonction L est somme, sur $]-1,1[$ de la série entière

$$\sum \frac{x^n}{n^2}$$

Cette série entière a pour rayon de convergence 1 donc L est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[,\ L'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit en particulier que $L'(0)=1$. Ensuite pour $x \neq 0$ on reconnait un DSE usuel :

$$xL'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$

$$L'(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Q24. La fonction h est dérivable sur $]0,1[$ et avec la question précédente :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0,1[,\ h'(x) &= L'(x) - L'(1-x) + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x) \\
&= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(x)}{1-x} + \frac{1}{x}\ln(1-x) - \frac{1}{1-x}\ln(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On en déduit que h est constante sur $]0,1[$.
Q25. Notons c la valeur de h sur $]0,1[$. On a donc :

$$h(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} c$$

Par ailleurs, L est continue sur $]-\infty,1]$ (question 17) donc :

$$L(x) + L(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} L(1) + L(0) = L(1)$$

De plus, avec les équivalents usuels, $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ donc :

$$\ln(x)\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} (x-1)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0 \quad \text{par croissances comparées}$$

On a donc :

$$h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} L(1)$$

Par unicité de la limite, on a donc $c = L(1)$ donc h est constante sur $]0,1[$ égale à $L(1)$. Enfin :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^t - \frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = L\left(\frac{1}{2}\right)$$

et :

$$L(1) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 2L\left(\frac{1}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = L\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(L(1) - \ln^2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} - \ln^2(2)\right)$$

CCINP PC 2022 Exercice 1 – Correction

Exercice 2. Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On réalise la division eucldienne de AP par B : il existe un unique couple (Q, R) tel que $AP = BQ + R$ et $\deg R < \deg B = n + 1$. On a donc $\deg R \leqslant n$. Par définition, $\varphi(P) = R \in \mathbb{C}_n[X]$.

Q2. Remarque : cette question n'est pas complètement habituelle car on ne démontre pas que φ est linéaire en démarrant le calcul comme d'habitude avec $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = \cdots$. Il faut suivre la marche à suivre décrite dans l'énoncé.
On ajoute les relations données dans l'énoncé :

$$A(P_1 + \lambda P_2) = BQ_1 + R_1 + \lambda BQ_2 + \lambda R_2 = BQ + R$$

en posant $Q = Q_1 + \lambda Q_2$ et $R = R_1 + \lambda R_2$. Comme $R_1, R_2 \in \mathbb{C}_n[X]$ qui est un espace vectoriel, on a bien $R \in \mathbb{C}_n[X]$. Ainsi, $A(P_1 + \lambda P_2) = BQ + R$ est la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B. On a donc :

$$\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda \varphi(P_2)$$

Par conséquent, φ est linéaire. D'après la question précédente, φ est une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$. Par conséquent, φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q3. Remarque : la matrice étant donnée dans l'énoncé, il faut justifier soigneusement que l'on obtient bien ce résultat. Pour cela, il faut calculer correctement $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ et il faut donc réaliser les divisions euclidiennes de $A \times 1, A \times X, A \times X^2$ par B. Traiter cette question correctement permet également de mieux comprendre comment fonctionne φ.
On explicite $\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)$ en effectuant la division euclidienne de A, AX et AX^2 par B :

$$A = X^2 + 2X = 0 \times B + X^2 + 2X \quad \text{et } \deg(X^2 - 2X) < \deg B$$
$$AX = X^3 + 2X^2 = 1 \times B + X^2 + X + 1 \quad \text{et } \deg(X^2 + X + 1) < \deg B$$

On en déduit que $\varphi(1) = X^2 + 2X$ et $\varphi(X) = X^2 + X + 1$. Ensuite :

$$AX^2 = X^4 + 2X^3$$

On pose la division euclidienne par B :

$$\begin{array}{rr|l}
 & X^4 + 2X^3 & X^3 + X^2 - X - 1 \\ \hline
\ominus & X^4 + X^3 - X^2 - X & X + 1 \\
 & X^3 + X^2 + X & \\
\ominus & X^3 + X^2 - X - 1 & \\
 & 2X + 1 &
\end{array}$$

et ainsi $\varphi(X^2) = 2X + 1$. En posant $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$, on obtient alors :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Q4. On commence par déterminer le polynôme caractéristique avec quelques opérations sur les lignes et colonnes pour simplifier le calcul (on peut aussi démarrer avec $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ pour faire apparaitre un zéro).

$$\begin{aligned}
\chi_M(x) &= -\begin{vmatrix} -x & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -x-1 & 1 & 1 \\ 1+x & 1-x & 2 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}_{C_1 \leftarrow C_1 - C_2} \\
&= -(1+x)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 2 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -(1+x)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-x & 3 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix}_{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \\
&= (1+x)\begin{vmatrix} 2-x & 3 \\ 1 & -x \end{vmatrix} \\
&= (1+x)(x(x-2)-3) = (1+x)(x^2-2x-3) \\
&= (x-3)(x+1)^2
\end{aligned}$$

On a donc $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}$. On trouve ensuite après calcul :

$$\boxed{E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_3(M) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Q5. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathrm{Sp}(M) = \{3, -1\}$ et :

$$E_{-1}(\varphi) = \mathrm{Vect}(X-1, X^2-1) \quad \text{et} \quad E_3(\varphi) = \mathrm{Vect}(X^2+2X+1)$$

La famille $(X-1, X^2-1)$ est échelonnée en degrés donc libre et ainsi $\dim E_{-1}(\varphi) = 2$. On a de plus $\dim E_3(\varphi) = 1$ donc :

$$\dim E_{-1}(\varphi) + \dim E_3(\varphi) = 3 = \dim \mathbb{C}_2[X]$$

On en déduit que φ est diagonalisable. La famille $\mathscr{B} = (X-1, X^2-1, X^2+2X+1)$ est une base de $\mathbb{C}_2[X]$ constituée de vecteurs propres pour φ.

Q6. On réalise les divisions euclidiennes de A, AX, AX^2 par $B = X^3$:

$$\begin{aligned}
A = \alpha + \beta X + \gamma X^2 &= 0 \times B + A \quad \text{et } \deg A < 3 \\
AX = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 &= \gamma \times B + \alpha X + \beta X^2 \quad \text{et } \deg(\alpha X + \beta X^2) < 3 \\
AX^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 &= (\gamma X + \beta) \times B + \alpha X^2 \quad \text{et } \deg(\alpha X^2) < 3
\end{aligned}$$

On a donc $\varphi(1) = A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$, $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$ et $\varphi(X^2) = \alpha X^2$ donc :

$$\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix}}$$

Q7. Remarque. L'énoncé demande une équivalence donc il faut démontrer une équivalence. Comme il n'est pas très pratique de rédiger directement un raisonnement par équivalences (et c'est potentiellement source d'erreurs), on peut faire une double implication. C'est d'ailleurs très simple à rédiger ici.

La matrice T est triangulaire donc :

$$\chi_T(x) = -\det(T - x\mathrm{I}_3) = (x-\alpha)^3$$

et $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha\}$.
Supposons que φ est diagonalisable. Alors sa matrice T est diagonalisable donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de T est égale à 3 ce qui donne ici :

$$\dim E_\alpha(T) = \dim \mathrm{Ker}(T - \alpha \mathrm{I}_3) = 3$$

D'après le théorème du rang, on a alors :

$$\mathrm{rg}(T - \alpha \mathrm{I}_3) = 0$$

et donc $T = \alpha \mathrm{I}_3$. On en déduit que $\beta = \gamma = 0$.
Supposons $\beta = \gamma = 0$. Alors $T = \alpha \mathrm{I}_3$ est diagonale donc φ est diagonalisable.
Conclusion : l'équivalence est démontrée.
Q8. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Avec les relations rappelées dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} D(x_k) &= P(x_k) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \times \underbrace{L_i(x_k)}_{=0 \text{ si } i \neq k} \\ &= P(x_k) - P(x_k) \times L_k(x_k) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, $x_0, \dots, x_n$ sont des racines de D.
Q9. Comme $P, L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $D \in \mathbb{C}_n[X]$ donc $\deg D \leqslant n$. D'après la question précédente, D admet $n+1$ racines distinctes. On a par conséquent $D = 0$ d'où :

$$\boxed{P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i}$$

Q10. On a par définition $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$. D'après la question précédente, tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ est combinaison linéaire de $L_0, \dots, L_n$. Par conséquent, $(L_0, \dots, L_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$. De plus, cette famille est de cardinal $n+1$ et $\dim \mathbb{C}_n[X] = n+1$. Par conséquent, $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
Q11. Soient $j, k \in [\![0, n]\!]$. Par définition :

$$AL_k = Q_k B + R_k$$

On applique en x_j :

$$A(x_j) L_k(x_j) = Q_k(x_j) B(x_j) + R_k(x_j) = R_k(x_j)$$

car x_j est une racine de B. On a alors deux cas.

- Si $j \neq k$, alors $L_k(x_j) = 0$ donc $R_k(x_j) = 0$.
- Si $j = k$, alors $L_k(x_j) = L_k(x_k) = 1$ donc $R_k(x_j) = R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. On a $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ donc avec Q9 :

$$\boxed{R_k = \sum_{j=0}^{n} \underbrace{R_k(x_j)}_{=0 \text{ si } j \neq k} \times L_j = R_k(x_k) L_k = A(x_k) L_k}$$

Q13. On vient d'établir que :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \varphi(L_k) = R_k = A(x_k) L_k$$

Notons $\mathscr{L} = (L_0, \dots, L_n)$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{L}}(\varphi) = \mathrm{diag}(A(x_0), \dots, A(x_n))$$

Cette matrice est diagonale donc $\mathscr{L}$ est une base de vecteurs propres pour φ donc φ est diagonalisable. De plus, $\mathrm{Sp}(\varphi) = \{A(x_0), \dots, A(x_n)\}$.

CCINP PC 2022 Exercice 3 – Correction

Exercice 3. Q28. Soit $n \geqslant 2$. On calcule et on simplifie :

$$\Delta_n = u_n - u_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

On utilise le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\Delta_n = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Donc $a = 1/2$ convient.

Q29. La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge car $2 > 1$. Par comparaison avec une série à termes négatifs, la série $\sum \Delta_n$ converge.

Q30. D'après la question précédente, la série $\sum (u_n - u_{n-1})$ converge. D'après la cours, la suite (u_n) est convergente.

Q31. On considère $t > 0$. Il existe alors un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 > t$. Alors :

$$\forall n \geqslant n_0,\ f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t \quad \text{car } t < n$$

Q32. En reprenant les notations précédentes, on a :

$$f_n(t) = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \ln t$$

Or $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{t}{n}$ (équivalent usuel) donc $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t$ et ainsi :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-t} \ln t$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln t$.

Q33. Soient $t \in \,]0, +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On distingue deux cas.

- Si $t < n$, alors :

  $$\left|f_n(t)\right| = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) |\ln t|$$

  Or on sait que $\ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -\frac{t}{n}$ donc $n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant -t$ et ainsi :

  $$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) \leqslant \mathrm{e}^{-t}$$

  On a donc $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t} |\ln t|$.
- Si $t \geqslant n$, alors $f_n(t) = 0$ par définition. De plus, $\mathrm{e}^{-t}|\ln t| \geqslant 0$, donc on a également $|f_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}|\ln t|$.

Dans tous les cas, $|f_n(t)| \leqslant e^{-t}|\ln t|$.

Q34. La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln t$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. On a les comparaisons suivantes (par croissances comparées en $+\infty$, avec l'équivalent simple $e^{-t} \underset{\to 0}{\sim} 1$) :

$$e^{-t}|\ln t| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt \text{ converge}$$

$$e^{-t}|\ln t| \underset{t\to 0}{\sim} -\ln t \quad \text{et} \int_0^1 -\ln t\,dt \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} e^{-t}|\ln t|\,dt$ et $\int_0^1 e^{-t}|\ln t|\,dt$ convergent donc $t \mapsto e^{-t}\ln t$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Q35. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$. Le plus simple est d'utiliser les questions 33 et 34 :

$$\forall t \in]0,+\infty[,\ \left|f_n(t)\right| \leqslant e^{-t}|\ln t| \quad \text{et} \int_0^{+\infty} e^{-t}|\ln t|\,dt \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale I_n converge.

Q36. **Remarque.** Il ne faut pas se contenter de dire « d'après le théorème de convergence dominée, » il faut faire apparaitre explicitement les hypothèses.

On a les hypothèses pour le théorème de convergence dominée :

- La suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers $f : t \mapsto e^{-t}\ln t$;
- On a la majoration :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in]0,+\infty[,\ \left|f_n(t)\right| \leqslant \varphi(t)$$

  avec $\varphi : t \mapsto e^{-t}|\ln t|$ fonction intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de convergence dominée :

$$\boxed{I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,dt}$$

Q37. On va réaliser une intégration par parties dans l'intégrale J_n. Vu l'intégrale que l'on souhaite obtenir, on considère les fonctions :

$$a'(u) = u^n \qquad a(u) = \frac{u^{n+1}-1}{n+1}$$

$$b(u) = \ln(1-u) \qquad b'(u) = \frac{-1}{1-u} = \frac{1}{u-1}$$

On a alors :

$$a(u)b(u) = \frac{u^{n+1}-1}{n+1}\ln(1-u) \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-1}{n+1} \times (-u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$$

Pour la limite en 1, on peut utiliser :

$$u^{n+1} - 1 = (u-1)\sum_{k=0}^{n} u^k \underset{u\to 1}{\sim} (n+1)(u-1)$$

On a alors, par croissances comparées :

$$a(u)b(u) \underset{u\to 1}{\sim} (n+1)(u-1)\ln(1-u) \xrightarrow[u\to 1]{} 0$$

Le produit ab admet des limites finies en 0 et en 1. Par intégration par parties, les intégrales

$$\boxed{J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u \quad \text{sont de même nature}}$$

On a déjà noté que, pour $u \in]0,1[$, $u^{n+1}-1 = (u-1)\sum_{k=0}^{n} u^k$ donc :

$$\frac{u^{n+1}-1}{u-1} = \sum_{k=0}^{n} u^k$$

La fonction $u \mapsto (u^{n+1}-1)/(u-1)$ est donc continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 0 et 1 donc intégrable sur $]0,1[$. On en déduit que l'intégrale J_n converge. On a de plus :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} u^k\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 u^k\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$$

$$\boxed{J_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$$

Q38. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On part de :

$$I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t$$

On réalise dans cette intégrale convergente le changement de variable affine $u = 1 - \dfrac{t}{n}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_1^0 u^n \ln(n(1-u))\,(-n)\,\mathrm{d}u = n\int_0^1 u^n \ln(n(1-u))\,\mathrm{d}u \\ &= n\int_0^1 u^n \ln(n)\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u \quad \text{(les deux intégrales convergent)} \end{aligned}$$

$$\boxed{I_n = \frac{n}{n+1}\ln n + nJ_n}$$

Q39. On a ainsi :

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = -\frac{n}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln n\right) = -\frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} + u_n\right) \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} -1\times\gamma \end{aligned}$$

Par unicité de la limite : $\boxed{-\gamma = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t}$.

CCINP PC 2021 Exercice 3 – Correction

Exercice 3. Q25. Pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
f_k(x)^2 - x &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 - x = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x)^2 + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\right) - x \\
&= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x)^2 - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\right) = \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $f_k(x)^2 \geqslant x$. Sachant que $f_k(x) \geqslant 0$ et la fonction racine carrée est croissante, on obtient $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$.

Q26. Pour $k \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}^+$:

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right) - f_{k-1}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{f_{k-1}(x)} - f_{k-1}(x)\right) = \frac{x - f_{k-1}(x)^2}{2f_{k-1}(x)}$$

Comme $k-1 \geqslant 1$, on a $f_{k-1}(x)^2 \leqslant x$ d'après la question précédente. D'après l'énoncé, $f_{k-1}(x) \geqslant 0$ donc :

$$f_k(x) - f_{k-1}(x) \leqslant 0$$

Par conséquent, la suite $(f_k(x))_{k\geqslant 1}$ est décroissante.

Q27. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. D'après la question précédente, la suite $(f_k(x))$ est décroissante et d'après la question 25 cette suite est minorée par $\sqrt{x}$. Par conséquent, la suite $(f_k(x))$ converge. On note $f(x)$ sa limite. On part de la relation :

$$f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)$$

On multiplie par $f_{k-1}(x)$ (pour éviter le dénominateur, dont la limite peut être nulle) :

$$f_{k-1}(x)f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(x)^2 + x\right)$$

On fait tendre k vers $+\infty$:

$$f(x)^2 = \frac{1}{2}\left(f(x)^2 + x\right)$$

On a donc $f(x)^2 = x$. Comme $f(x) \geqslant 0$ comme limite d'une suite positive, on a $f(x) = \sqrt{x}$. Par conséquent, la suite de fonctions (f_k) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Q28. **Remarque :** pour arriver simplement à l'égalité, une solution consiste à faire la différence des deux termes, réduire au même dénominateur et montrer que le résultat est nul.

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
f_{k+1}(x) - \sqrt{x} - \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) &= \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - \sqrt{x} - \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - 2\sqrt{x} - \left(f_k(x) - \sqrt{x}\right)\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2f_k(x)}\left(\left(f_k(x)^2 + x\right) - 2f_k(x)\sqrt{x} - \left(f_k(x) - \sqrt{x}\right)\left(f_k(x) - \sqrt{x}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2f_k(x)}\left(f_k(x)^2 + x - 2f_k(x)\sqrt{x} - \left(f_k(x) - \sqrt{x}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_{k+1}(x)-\sqrt{x}-\frac{f_k(x)-\sqrt{x}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)=0}$$

Q29. Remarque. La relation à obtenir est donnée dans l'énoncé. Il faut privilégier une démonstration par récurrence pour un maximum de rigueur.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On considère pour $k \in \mathbb{N}^*$ l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(k) : \left|f_k(x)-\sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

Pour $k=1$, on calcule :

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\left(f_0(x)+\frac{x}{f_0(x)}\right)=\frac{1+x}{2}$$

Ainsi, $\mathscr{H}(1)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{H}(k)$ est vraie. On a alors :

$$\left|f_{k+1}(x)-\sqrt{x}\right|=\frac{|f_k(x)-\sqrt{x}|}{2}\left|1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right|$$

On a vu que $f_k(x) \geqslant \sqrt{x} \geqslant 0$, on a donc :

$$0 \leqslant 1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$$

Ainsi $\left|1-\frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right| \leqslant 1$ et par conséquent :

$$\left|f_{k+1}(x)-\sqrt{x}\right| \leqslant \frac{|f_k(x)-\sqrt{x}|}{2} \leqslant \frac{1+x}{2\times 2^k}=\frac{1+x}{2^{k+1}}$$

On en déduit que $\mathscr{H}(k+1)$ est vraie. Par récurrence :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ \left|f_k(x)-\sqrt{x}\right| \leqslant \frac{1+x}{2^k}}$$

Q30. On suppose que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine carrée $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On a alors $A=B^2$ donc :

$$\boxed{\det(A)=\det(B^2)=\det(B)^2 \geqslant 0} \quad \text{car } \det(B) \in \mathbb{R}$$

Q31. On a ici $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $\det(A) \geqslant 0$.
On va démontrer que A ne possède pas de racine carrée (ce qui montrera que la réciproque du résultat établi dans la question précédente est fausse). On propose deux méthodes pour cela.
Méthode 1 : en suivant les indications de l'énoncé. On suppose $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ et $B^2=A$. On a :

$$B^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

On doit avoir $b(a+d)=1$ et $c(a+d)=0$. On ne peut donc pas avoir $a+d=0$. On en déduit que $c=0$.
Ainsi :

$$B^2=\begin{pmatrix}a^2 & b(a+d)\\ 0 & d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

On doit avoir $a^2 = d^2 = 0$ donc $a = d = 0$. On trouve alors que $B^2 = 0$ d'où une contradiction.
Méthode 2 : en utilisant des résultats de réduction. On suppose $B^2 = A$. On remarque que $A^2 = 0$, on a donc $B^4 = 0$. Le polynôme X^4 est alors annulateur de B, donc $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0\}$. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, χ_B est scindé donc B possède au moins une valeur propre (éventuellement complexe) donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0\}$. Comme χ_B est unitaire, de degré 2 et scindé sur $\mathbb{C}$ et a pour seule racine 0, on en déduit que $\chi_B = X^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $B^2 = 0$ d'où une contradiction.
La réciproque est fausse.
Q32. La matrice S est symétrique et réelle, d'après le théorème spectral la matrice S est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Q33. Par hypothèse, P est orthogonale donc $P^{-1} = P^\top$. Alors :

$$R^\top = (P\Delta P^{-1})^\top = (P^{-1})^\top \Delta^\top P^\top = {P^\top}^\top \Delta^\top P^\top = P\Delta P^{-1} = R$$

La matrice R est symétrique. De plus :

$$R^2 = (P\Delta P^{-1})^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = S$$

Q34. On a $P^{-1}\mathrm{I}_n P = \mathrm{I}_n \in \mathcal{D}_n^+$. Par conséquent, $\mathrm{I}_n \in \mathcal{C}_P$. On suppose que $M \in \mathcal{C}_P$, on pose $H = P^{-1}MP$, alors $H \in \mathcal{D}_n^+$. On note $H = \mathrm{diag}(u_1, \dots, u_n)$ avec $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Deux matrices semblables ont le même déterminant donc :

$$\det(M) = \det(H) = u_1 \cdots u_n > 0$$

donc M est inversible. On a de plus :

$$M^{-1} = (PHP^{-1})^{-1} = PH^{-1}P^{-1}$$

donc :

$$\begin{aligned} P^{-1}\left(\frac{1}{2}\left(M + SM^{-1}\right)\right)P &= \frac{1}{2}\left(P^{-1}MP + P^{-1}SPP^{-1}M^{-1}P\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(H + DH^{-1}\right) \end{aligned}$$

On a $H^{-1} = \mathrm{diag}(u_1^{-1}, \dots, u_n^{-1})$ donc :

$$H + DH^{-1} = \mathrm{diag}(u_1 + \lambda_1 u_1^{-1}, \dots, u_n + \lambda_n u_n^{-1})$$

Or $\lambda_1 u_i^{-1} \in \mathbb{R}^+$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ donc $u_i + \lambda_i u_i^{-1} \in \mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, $H + DH^{-1} \in \mathcal{D}_n^+$ donc

$$\frac{1}{2}\left(M + SM^{-1}\right) \in \mathcal{C}_P$$

Q35. On a :

$$V_k = P^{-1}U_kP = \frac{1}{2}\left(P^{-1}U_{k-1}P + P^{-1}SPP^{-1}U_{k-1}^{-1}\right) = \frac{1}{2}\left(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1}\right)$$

On considère pour $k \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}(k) : V_k = \mathrm{diag}(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n))$$

On a tout d'abord :

$$\mathrm{diag}(f_0(\lambda_1), \dots, f_0(\lambda_n)) = \mathrm{I}_n = V_0$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathscr{H}(k-1)$ est vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}
V_k &= \frac{1}{2}\left(V_{k-1} + DV_{k-1}^{-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} f_{k-1}(\lambda_1) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_{k-1}(\lambda_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_{k-1}(\lambda_1)^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & f_{k-1}(\lambda_n)^{-1} \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(\lambda_1) + \frac{\lambda_1}{f_{k-1}(\lambda_1)}\right) & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \frac{1}{2}\left(f_{k-1}(\lambda_n) + \frac{\lambda_n}{f_{k-1}(\lambda_n)}\right) \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{diag}(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n))
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathscr{H}(k)$ est vraie. Par récurrence :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ V_k = \operatorname{diag}(f_k(\lambda_1), \dots, f_k(\lambda_n))}$$

Q36. On remarque tout d'abord que pour une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en utilisant $P^\top = P^{-1}$ et le fait que deux matrices semblables ont la même trace :

$$N(PBP^{-1})^2 = \operatorname{tr}\left(PBP^{-1}(PBP^{-1})^\top\right) = \operatorname{tr}(PBP^{-1}PB^\top P^{-1}) = \operatorname{tr}(PBB^\top P^{-1}) = \operatorname{tr}(BB^\top) = N(B)^2$$

On a donc $N(PBP^{-1}) = N(B)$. On rappelle que $R = \Delta P^{-1}$ et $U_k = PV_kP^{-1}$. Alors :

$$\boxed{N(R - U_k) = N(P\Delta P^{-1} - PV_kP^{-1}) = N(P(\Delta - V_k)P^{-1}) = N(\Delta - V_k)}$$

Q37. On remarque que pour une matrice diagonale $B = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n)$, on a :

$$N(B) = \sqrt{\operatorname{tr}(BB^\top)} = \sqrt{b_1^2 + \cdots + b_n^2}$$

Ainsi, avec la question 29 :

$$\begin{aligned}
N(R - U_k) = N(\Delta - V_k) &= \sqrt{\left(\sqrt{\lambda_1} - f_k(\lambda_1)\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{\lambda_n} - f_k(\lambda_n)\right)^2} \\
&\leqslant \sqrt{\frac{(1+\lambda_1)^2}{2^{2k}} + \cdots + \frac{(1+\lambda_n)^2}{2^{2k}}} = \frac{1}{2^k}\sqrt{(1+\lambda_1)^2 + \cdots + (1+\lambda_n)^2}
\end{aligned}$$

Pour poursuivre, on peut remarquer que :

$$\sqrt{(1+\lambda_1)^2 + \cdots + (1+\lambda_n)^2} = N(\mathrm{I}_n + D)$$

et on peut ainsi utiliser l'inégalité triangulaire :

$$N(R - U_k) \leqslant \frac{1}{2^k} N(\mathrm{I}_n + D) \leqslant \frac{N(\mathrm{I}_n) + N(D)}{2^k} = \frac{n + \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}}{2^k}$$

Ce n'est pas l'égalité demandée (mais cette inégalité aurait aussi permis de conclure à la question suivante). On a $\sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$ alors qu'il faudrait avoir $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Or, comme $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}^+$:

$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)^2 = \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \underbrace{\sum_{\substack{i,j \in [\![1,n]\!] \\ i \neq j}} \lambda_i\lambda_j}_{\geqslant 0} \geqslant \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2$$

et en prenant la racine :

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \geqslant \sqrt{\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2}$$

On a donc :

$$\boxed{N(R - U_k) \leqslant \frac{n + \lambda_1 + \cdots + \lambda_n}{2^k} = \frac{n + \operatorname{tr}(S)}{2^k}}$$

Q38. On a :

$$\frac{n + \operatorname{tr}(S)}{2^k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Avec la question précédente et $N(R - U_k) \geqslant 0$ on obtient par encadrement :

$$N(R - U_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Par conséquent, la suite (U_k) converge vers R.

CCINP PC 2020 Exercice 1 – Correction

Exercice 1. Q1. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\left|f(x,t)\right| = \left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| \underset{t\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \int_0^1 1\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$\left|f(x,t)\right| = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\mathrm{e}^{-xt}\right) \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \text{ converge car } x > 0$$

Par comparaison de fonctions positives, les intégrales $\int_0^1 |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} |f(x,t)|\,\mathrm{d}t$ convergent. Ainsi, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ pour tout $x > 0$.

▶ Continue, prolongement, comparaison, référence, signe, conclusion $\boxed{6}$

Q2. Le plus simple est sans doute de partir de l'intégrale donnée dans l'énoncé

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

dont on ne sait pour l'instant pas si elle est convergente ou divergente. On considère les fonctions :

$$u'(t) = \frac{1}{t^2} \qquad\qquad u(t) = -\frac{1}{t}$$
$$v(t) = 1-\cos(t) \qquad\qquad v'(t) = \sin(t)$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. De plus :

$$u(t)v(t) = -\frac{1-\cos t}{t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad u(t)v(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2/2}{t} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$

On obtient deux limites finies. Par intégration par parties, les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{sont de même nature}$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{t^2}$ est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\frac{1-\cos t}{t^2} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^2/2}{t^2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \int_0^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$
$$= \underset{t\to+\infty}{\mathrm{O}}\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge donc l'intégrale I est convergente.

▶ Fonctions, C^1, limites, même nature, calcul $\boxed{5}$

▶ Pronlongement, comparaison, référence, signe, conclusion $\boxed{5}$

Q3. Soit $x \geqslant 0$. La fonction $t \mapsto u(x,t)$ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall t > 0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = -\frac{x\cos t - \sin t}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} + x\frac{x\sin t + \cos t}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} = \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$$

Par conséquent, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est une primitive de $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sur $]0,+\infty[$.

▶ Dérivable, calcul (convaincant) $\boxed{2}$

Q4. Soit $x>0$. Avec l'inégalité admise, on a :

$$\forall t>0,\ \left|\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt}$$

Par croissance de l'intégrale :

$$|F(x)| = \left|\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

(on note que d'après les questions précédentes, les intégrales utilisées sont bien convergentes). De plus :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\frac{-\mathrm{e}^{-xt}}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x} = \frac{1}{x}$$

On en déduit l'inégalité :

$$\forall x>0,\ |F(x)| \leqslant \frac{1}{x}$$

Or $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc, par théorème d'encadrement, $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

▶ Majoration, croissance, théorème encadrement, conclusion $\boxed{4}$

Q5. Soit $a>0$.

- On a montré à la question 1 que pour tout $x\in[a,+\infty[$, la fonction $t\longmapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$;
- Pour tout $t>0$, la fonction $x\longmapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in[a,+\infty[,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$$

- On a la majoration :

$$\forall x\in[a,+\infty[,\ \forall t>0,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |\sin t|\,\mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-at}$$

  et la fonction de référence $t\longmapsto \mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

D'après le théorème de classe C^1, la fonction F est de classe C^1, donc dérivable, sur $[a,+\infty[$ et on a :

$$\forall x\in[a,+\infty[,\ F'(x) = -\int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

▶ C^1, dérivée $\boxed{2}$

▶ Quantificateurs, majoration, intégrable $\boxed{3}$

Q6. La fonction F est dérivable sur $[a,+\infty[$ et ceci est vrai quel que soit $a>0$. Par conséquent, F est dérivable sur $]0,+\infty[$ et avec la question 3, pour tout $x>0$:

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty}\sin(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \lim_{t\to+\infty}\frac{x\sin t+\cos t}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} - \lim_{t\to 0}\frac{x\sin t+\cos t}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt} = 0 - \frac{1}{1+x^2}$$

Il existe alors $C\in\mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x>0,\ F(x) = C - \arctan x$$

On sait de plus que $F(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (question 4) et $\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi/2$, on a donc $C=\pi/2$ et ainsi :

$$\boxed{\forall x>0,\ F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x}$$

► $\forall a > 0$, calcul $F'(x)$, intégration, constante, limite $\boxed{5}$

Q7. On a par définition :

$$F_1(x) = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

- Pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur $[0,1]$;
- On a la majoration :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall t \in]0,1],\ \left| \frac{\sin t}{t} \mathrm{e}^{-xt} \right| \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1$$

et la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $]0,1]$.

D'après le théorème de continuité, la fonction F_1 est définie et continue sur $[0,1]$.

► Continue, quantificateurs, majoration, intégrable $\boxed{4}$

Q8. Soit $x \in [0,1]$. La fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$ et :

$$\left| \frac{u(x,t)}{t^2} \right| = \frac{|x \sin t + \cos t|}{t^2(1+x^2)} \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \frac{x+1}{t^2} \underset{t \to +\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2} \right) \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \,\mathrm{d}t \text{ converge}$$

Par comparaison de fonctions positives, $t \mapsto u(x,t)/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$. On réalise une intégration par parties en utilisant la primitive de $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$ obtenue à la question 3. On considère les fonctions :

$$U'(t) = \sin(t)\mathrm{e}^{-xt} \qquad V(t) = \frac{1}{t}$$

$$U(t) = u(x,t) \qquad V'(t) = -\frac{1}{t^2}$$

Les fonctions U et V sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$U(1)V(1) = u(x,1) = -\frac{x \sin 1 + \cos 1}{1+x^2} \mathrm{e}^{-x}$$

$$U(t)V(t) = \frac{u(x,t)}{t} = -\frac{x \sin t + \cos t}{t(1+x^2)} \mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \quad \text{limite finie}$$

On peut alors réaliser une intégration par parties dans l'intégrale convergente $F_2(x)$ et on obtient :

$$F_2(x) = \lim_{t \to +\infty} U(t)V(t) - U(1)V(1) + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{x \sin 1 + \cos 1}{1+x^2} \mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

► Continue par morceaux, comparaison, référence, signe, conclusion $\boxed{5}$

► Fonctions, C^1, limites, calcul, conclusion $\boxed{5}$

Q9. On considère ici, pour $x \in [0,1]$:

$$G(x) = \frac{x \sin 1 + \cos 1}{1+x^2} \mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad H(x) = \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

La fonction G est continue sur $[0,1]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$. Pour la fonction H :

- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, la fonction $x \mapsto u(x,t)/t^2$ est continue sur $[0,1]$;
- On a la majoration :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall t \in [1,+\infty[,\ \left| \frac{u(x,t)}{t^2} \right| = \frac{|x \sin t + \cos t|}{t^2(1+x^2)} \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \frac{x+1}{t^2(x^2+1)} \leqslant \frac{2}{t^2}$$

(en utilisant $x^2 + 1 \geqslant 1$ et $1 + x \leqslant 2$). La fonction majorante est une fonction de référence intégrable sur $[1,+\infty[$.

D'après le théorème de continuité, H est continue sur $[0,1]$. Ainsi, $F_2 = G + H$ est continue sur $[0,1]$ comme somme de deux fonctions continues.

▶ **Première expression** $\boxed{1}$

▶ **Continue, quantificateurs, majoration, continue par morceaux, intégrable** $\boxed{5}$

Q10. On a d'après la relation de Chasles $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ pour tout $x \geqslant 0$. Les fonctions F_1 et F_2 sont continues en 0 donc F est continue en 0 et ainsi :

$$I = F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right) = \frac{\pi}{2}$$

▶ **Continue en 0, limite en 0, conclusion** $\boxed{3}$

CCINP PC 2019 Exercice 2 – Correction

Exercice 2. Q18. La fonction f est DSE sur $]-r,r[$ donc d'après le cours f est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et ses dérivées successives sont DSE sur $]-r,r[$ avec en particulier :

$$\forall x \in]-r,r[,\ f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

et toujours d'après le cours les séries entières $\sum n a_n x^{n-1}$ et $\sum n(n-1)a_n x^{n-2}$ ont même rayon de convergence r que $\sum a_n x^n$.

Q19. Pour $x \in]-r,r[$:

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= (1-x)\sum_{\substack{\cancel{n=2}\\ n=0}}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - (1+x)\sum_{\substack{\cancel{n=1}\\ n=0}}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1)-n+1)a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 a_n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n \quad \text{(changement d'indice)} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n \quad \text{le terme pour } n=1 \text{ est nul}
\end{aligned}$$

La suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $b_n = (n-1)^2$ convient.

Q20. Par unicité du développement en série entière, avec $r > 0$:

$$\begin{aligned}
f \text{ sol. de } (H) \text{ sur }]-r,r[&\iff \forall x \in]-r,r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0 \\
&\iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ (n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0 \\
&\iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 2,\ a_n - a_{n-1} = 0 \text{ (car } n-1 \neq 0) \\
&\iff a_0 = 0 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ a_{n+1} - a_n = 0
\end{aligned}$$

Q21. On suppose f solution de (H) sur $]-r,r[$. D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est constante. On pose $a_1 = \lambda$, on a alors $a_n = \lambda$ pour $n \geqslant 1$ et $a_0 = 0$. La fonction f est alors la somme sur $]-r,r[$ de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 1} \lambda x^n$$

Le rayon de convergence r de cette série entière vaut :

- $+\infty$ si $\lambda = 0$;
- 1 si $\lambda \neq 0$ car la série géométrique $\sum x^n$ a pour rayon de convergence 1.

Par conséquent, $r \geqslant 1$. Pour $x \in]-1,1[$, la série géométrique $\sum x^n$ converge et ainsi :

$$\forall x \in]-1,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\lambda x}{1-x}$$

Q22. D'après le cours, la fonction $x \mapsto (1-x)^{-1}$ est DSE sur $]-1,1[$, donc la fonction g est DSE sur $]-1,1[$ comme produit de deux fonctions DSE. La fonction g est de classe C^∞ sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$:

$$\begin{aligned}
x^2(1-x)g''(x) - x(1+x)g'(x) + g(x) &= x^2(1-x)\frac{2\lambda}{(1-x)^3} - x(1+x)\frac{\lambda}{(1-x)^2} + \frac{\lambda x}{1-x} \\
&= \frac{2\lambda x^2}{(1-x)^2} - \frac{\lambda x(1+x)}{(1-x)^2} + \frac{\lambda x(1-x)}{(1-x)^2} \\
&= \frac{\lambda x}{(1-x)^2}\left(2x - (1+x) + (1-x)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Donc g est solution de (H) sur $]-1,1[$.

Q23. La fonction $x \mapsto x^{-1}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ donc la fonction z est de classe C^2 sur I comme produit de deux fonctions de classe C^2 sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ z'(x) = -\frac{1}{x^2}y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = \frac{2}{x^3}y(x) - \frac{2}{x^2}y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)y''(x)$$

Q24. Avec les calculs précédents :

$$\begin{aligned}
\forall x \in I,\ xz''(x) + z'(x) &= \frac{2}{x^2}y(x) - \frac{2}{x}y'(x) + (1-x)y''(x) - \frac{1}{x^2}y(x) + \frac{1-x}{x}y'(x) \\
&= (1-x)y''(x) - \frac{1+x}{x}y'(x) + \frac{1}{x^2}y(x) \\
&= \frac{1}{x^2}\left(x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)\right)
\end{aligned}$$

ou encore :

$$\forall x \in I,\ x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = x^2\left(xz''(x) + z'(x)\right)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
y \text{ sol. de } (E) \text{ sur } I &\iff \forall x \in I,\ x^2\left(xz''(x) + z'(x)\right) = 2x^3 \\
&\iff \forall x \in I,\ xz''(x) + z'(x) = 2x \quad (\text{car } 0 \notin I) \\
&\iff z \text{ sol. sur } I \text{ de } (E_1)
\end{aligned}$$

L'équivalence est démontrée.

Q25. **Méthode 1.** On note que z est solution de (E_1) sur I si, et seulement si, z est une primitive d'une solution sur I de :

$$u' + \frac{1}{x}u = 2 \quad (E')$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, l'équation homogène associée est :

$$u' + \frac{1}{x}u = 0 \quad (H')$$

Les solutions de (H') sont les fonctions :

$$u : x \in I \mapsto C\exp(-\ln x) = \frac{C}{x}$$

avec $C \in \mathbb{R}$ (on note que pour $x \in I$ on a $x > 0$). La fonction $u : x \in I \mapsto x$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ u'(x) + \frac{1}{x} u(x) = 1 + 1 = 2$$

donc u est une solution particulière de (E'). Les solutions de (E') sur I sont donc les fonctions :

$$u : x \in I \mapsto \frac{C}{x} + x$$

avec $C \in \mathbb{R}$. Par conséquent, si z est solution de (E_1) sur I alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\boxed{\forall x \in I,\ z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x}$$

Méthode 2. On a directement :

$$\begin{aligned} z \text{ sol. de } (E_1) \text{ sur } I &\iff \forall x \in I,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(xz'(x)\big) = 2x \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ xz'(x) = x^2 + \lambda \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ z'(x) = x + \frac{\lambda}{x} \end{aligned}$$

Q26. On reprend les notations y et z. On a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned} y \text{ sol. de } (E) \text{ sur } I &\iff z \text{ sol. de } (E_1) \text{ sur } I \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ z(x) = \frac{\lambda}{x} + x \end{aligned}$$

(l'équivalence a été établie à la question précédente, méthode 2). Pour $x \in I$, on a $x > 0$ donc en intégrant :

$$\begin{aligned} y \text{ sol. de } (E) \text{ sur } I &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ z(x) = \lambda \ln(x) + \mu + \frac{x^2}{2} \\ &\iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\lambda \ln(x) + \mu + \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Les solutions de (E) sur I sont donc les fonctions :

$$\boxed{y : x \in I \mapsto \frac{x^3}{2(1-x)} + \frac{\mu x}{1-x} + \frac{\lambda x}{1-x}\ln(x) \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

Q27. Analyse. On considère une fonction y solution de (E) sur $]0, +\infty[$. Alors y est solution de (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$ donc d'après ce qui précède il existe $\lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in]0, 1[,\ y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\lambda \ln x + \mu + \frac{x^2}{2}\right)$$
$$\forall x \in]1, +\infty[,\ y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\lambda' \ln x + \mu' + \frac{x^2}{2}\right)$$

La fonction y doit être dérivable en 1 et donc continue en 1. On commence par regarder la limite à gauche en 1 :

$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \frac{\ln(1+x-1)}{1-x} \xrightarrow[x \to 1^{-1}]{} -1$$
$$\left(\mu + \frac{x^2}{2}\right) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \mu + \frac{1}{2}$$
$$\frac{x}{1-x}\left(\mu + \frac{x^2}{2}\right) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \pm\infty \quad \text{si } \mu \neq -\frac{1}{2}$$

Par conséquent, y admet une limite finie en 1^{-1} si, et seulement si, $\mu = -1/2$. On a alors :

$$\forall x \in]0,1[,\ y(x) = \frac{x}{1-x}\left(\lambda \ln x + \frac{x^2-1}{2}\right) = \frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} + x\frac{x^2-1}{2(1-x)} = \frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(x+1)}{2}$$

et en particulier :

$$y(1) = \lim_{x\to 1^-} y(x) = -\lambda - 1$$

On trouve de même que $\mu' = -1/2$ et ainsi :

$$y(1) = \lim_{x\to 1^+} y(x) = -\lambda' - 1$$

On en déduit $\lambda = \lambda'$. On a alors :

$$\forall x > 0,\ y(x) = \frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(x+1)}{2} \quad \text{avec} \quad y(1) = -\lambda - 1$$

Synthèse. Considérons réciproquement une telle fonction y. Elle est alors continue sur $]0,+\infty[$, dérivable sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ et solution de (E) sur chacun des ces intervalles. Étudions sa dérivabilité en 1 à l'aide d'un taux d'accroissement :

$$\begin{aligned}
\frac{y(x)-y(1)}{x-1} &= \frac{1}{x-1}(y(x)+1+\lambda) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(x+1)}{2} + 1 + \lambda\right) \\
&= \frac{1}{x-1}\left(\lambda \frac{x\ln(x)+1-x}{1-x} + \frac{2-x(x+1)}{2}\right) \\
&= -\lambda \frac{x\ln(x)+1-x}{(x-1)^2} + \frac{-(x+2)(x-1)}{2(x-1)} \\
&= -\lambda \frac{x\ln(x)+1-x}{(x-1)^2} - \frac{x+2}{2} \\
&\xrightarrow[x\to 1]{} -\frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2}
\end{aligned}$$

Or dans l'équation (E) avec $x = 1$, $y(1) = -\lambda - 1$ et $y'(1) = -\frac{3}{2} - \frac{\lambda}{2}$ on a :

$$-2y'(1) + y(1) = 2$$

Ainsi, y est dérivable en 1 et solution de (E) en 1.
Conclusion. Les solutions des (E) sur $]0,+\infty[$ sont les fonctions y définies par

$$\boxed{\forall x > 0,\ y(x) = \frac{\lambda x \ln(x)}{1-x} - \frac{x(x+1)}{2} \quad \text{avec} \quad y(1) = -\lambda - 1 \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}}$$