DM 6 pour le Vendredi 7 février 2025 **PC***

Pensez à laisser une marge sur les copies, au minimum 5 cm.

Dans ce problème, on aborde différentes applications de la réduction. Chacune des parties qui suivent est extraite d'un sujet de concours. Dans toute la suite, f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Partie 1 Racines carrées

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable.

2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geqslant 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.

4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.

5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée en question 2.

6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.

7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Dans la suite de cette partie, on note f et j les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Calculer J^m pour tout entier $m \geqslant 1$.

9. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $f^m = \mathrm{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)\,j$.
Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?

10. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.

11. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geqslant 0$, $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

12. Après avoir calculé p^2, q^2, $p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.

13. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Écrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.

14. Déterminer une matrice K de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.

15. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.

16. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie 2 Sous-espaces stables

Dans cette partie, n et p sont deux entiers naturels au moins égaux à 2, f est un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, qui admet p valeurs propres distinctes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$ et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note E_i le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ_i.

Il s'agit ici de montrer qu'un sous-espace F de E est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$.

17. Montrer que tout sous-espace F de E tel que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$ est stable par f.

18. Soit F un sous-espace de E stable par f et x un vecteur non nul de F. Justifier l'existence et l'unicité de $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ dans $E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.

On pose $H_x = \{i \in [\![1, m]\!] \mid x_i \neq 0\}$. Comme on a supposé $x \neq 0$, H_x est non vide et, quitte à renuméroter les valeurs propres (et les sous-espaces propres), on peut supposer que $H_x = [\![1, r]\!]$ avec $1 \leqslant r \leqslant p$.

On a ainsi $x = \sum_{i=1}^{r} x_i$ avec $x_i \in E_i \setminus \{0\}$ pour tout i de $[\![1, r]\!]$.
On pose $V_x = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_r)$.

19. Montrer que $\mathscr{B}_x = (x_1, \ldots, x_r)$ est une base de V_x.

20. Montrer que pour tout j de $[\![1, r]\!]$, $f^{j-1}(x)$ appartient à V_x et donner la matrice de la famille $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ dans la base $\mathscr{B}_x$.

21. Montrer que $(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r}$ est une base de V_x.

22. En déduire que pour tout i de $[\![1, r]\!]$, x_i appartient à F et conclure.

Dans la suite de cette partie, on se place dans le cas où $p = n$.

23. Préciser la dimension de E_i pour tout i dans $[\![1, p]\!]$.

24. Combien y a-t-il de droites de E stables par f ?

25. Si $n \geqslant 3$ et $k \in [\![2, n-1]\!]$, combien y a-t-il de sous-espaces de E de dimension k et stables par f ?

26. Combien y a-t-il de sous-espaces de E stables par f dans ce cas ? Les donner tous.

Partie 3 Commutant

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice unité et O la matrice nulle de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2,1,-2) \in \mathbb{R}^3$.

27. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

28. La matrice A est-elle inversible ?

29. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$.

30. Démontrer que le vecteur w de $\mathbb{R}^3$ dont la 2-ième coordonnée dans $\mathscr{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ est $w = (0,1,-1)$.

31. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathscr{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$.

32. Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathscr{B}'$. En déduire la seule valeur propre de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

33. Donner la relation liant les matrices A, N, P et P^{-1} puis en déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a $A^k = O$.

On note C_N (respectivement C_A) l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement A).

34. Montrer que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que $C_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$.

On admet que C_A est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

35. Établir que :

$$M \in C_A \iff P^{-1}MP \in C_N$$

En déduire que $C_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. Quelle est la dimension de C_A ?

Partie 4 Système d'équations différentielles

Soit (E_1) l'équation différentielle : $y^{(3)} = y$.
Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs complexes de cette équation.

36. Soit la fonction $g = f + f' + f''$. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par g.

37. Résoudre l'équation (E_2).

38. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

Soit (S) le système différentiel à coefficients constants

$$(S) \qquad X' = AX \quad \textit{avec } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \textit{ et } \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

39. Démontrer que la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? Est-elle diagonalisable $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

40. En utilisant la question précédente, résoudre le système (S).

41. On suppose ici que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ f''(t) \end{pmatrix}$$

Démontrer que f est solution de (E_1) si, et seulement si, X est solution de (S).

42. Retrouver alors les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question 38.

Correction DM 6 – CCP PC 2010, Centrale 1 PC 2015, EDHEC 2006, E3A PSI 2019

Partie 1 Racines carrées

1. Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = X(X-1)(X-4)$. On en déduit $\mathrm{Sp}(A) = \{0,1,4\}$. Le polynôme χ_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable et f est diagonalisable.

2. On obtient facilement $E_0(A) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $E_1(A) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $E_4(A) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille (v_1, v_2, v_3) est une famille de vecteurs propres de f, associés à des valeurs propres distinctes. Ainsi, (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteur propres pour f et la matrice de f dans cette base est $D = \mathrm{diag}(0,1,4)$.

3. Comme P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (v_1, v_2, v_3), on a $D = P^{-1}AP$ et ainsi :

$$\forall m \geqslant 1,\ A^m = (PDP^{-1})^m = PD^mP^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix}P^{-1}$$

4. On applique l'algorithme du pivot de Gauss à $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ pour déterminer P^{-1} :

$$\left[\begin{array}{cccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
-2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1
\end{array}\right]$$

On obtient ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et :

$$\forall m \geqslant 1,\ A^m = \begin{pmatrix} 2\cdot 4^m & 4^m & 1-2\cdot 4^m \\ -2\cdot 4^m & -4^m & 2\cdot 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice A^m est la matrice de f^m dans la base canonique.

5. Pour une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$MD = DM \iff \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ -d & 0 & 3f \\ -4g & -3h & 0 \end{pmatrix} = 0 \iff b = c = d = f = g = h = 0$$
$$\iff M = \operatorname{diag}(a, e, i)$$

On en déduit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ commute avec D si, et seulement si, elle est diagonale.

6. Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et supposons que $H^2 = D$. Alors :

$$HD - DH = HH^2 - H^2H = H^3 - H^3 = 0$$

Par conséquent, si $H^2 = D$, alors les matrices H et D commutent.

7. Soit $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $H^2 = D$. D'après la question précédente, H et D commutent, donc d'après la question 5, la matrice H est diagonale. Réciproquement, considérons une matrice $H \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, $H = \operatorname{diag}(a, b, c)$:

$$H^2 = D \iff \begin{cases} a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 4 \end{cases}$$

L'ensemble des matrices H telles que $H^2 = D$ est l'ensemble :

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. On note B la matrice de h dans la base canonique et H la matrice de h dans la base (v_1, v_2, v_3). La formule de changement de base donne $H = P^{-1}BP$ et on a :

$$h^2 = f \iff B^2 = A \iff PH^2P^{-1} = PDP^{-1} \iff H^2 = D \iff H \in R$$

avec l'ensemble R défini plus haut. Ainsi les endomorphismes h tels que $h^2 = f$ sont ceux dont la matrice dans la base canonique est l'une des matrices :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

Il existe donc quatre endomorphismes h tels que $h^2 = f$.

8. On obtient facilement par le calcul :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$$

On pose donc l'hypothèse de récurrence $\mathscr{H}(m)$: $J^m = 3^{m-1}J$. Pour $m = 1$, on a clairement $J^1 = 3^0 J$, donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie. Supposons $m \geqslant 1$ et $\mathscr{H}(m)$ vraie, alors :

$$J^{m+1} = J^m J = 3^{m-1}J^2 = 3^{m-1}3J = 3^{(m+1)-1}J$$

donc $\mathscr{H}(m+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $m \geqslant 1$, $J^m = 3^{m-1}J$.

9. On travaille tout d'abord matriciellement et on propose deux méthodes.
Méthode 1. On procède par récurrence en considèrant pour $m \in \mathbb{N}^*$ l'hypothèse :

$$\mathscr{H}(m) : A^m = \mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$$

On a tout d'abord :

$$\mathrm{I}_3 + \frac{4^1 - 1}{3} J = \mathrm{I}_3 + J = A$$

donc $\mathscr{H}(1)$ est vraie. Soit $m \geqslant 1$ et supposons $\mathscr{H}(m)$ vraie. On a alors :

$$A^{m+1} = AA^m = (\mathrm{I}_3 + J)\left(\mathrm{I}_3 + \frac{1}{3}(4^m - 1)J\right) = \mathrm{I}_3 + \frac{4^m - 1}{3} J + J + \frac{4^m - 1}{3} J^2$$

Sachant que $J^2 = 3J$:

$$A^{m+1} = \mathrm{I}_3 + \frac{4^m - 1}{3} J + J + \frac{4^m - 1}{3} 3J = \mathrm{I}_3 + \frac{4^m - 1 + 3 + 3 \cdot 4^m - 3}{3} J = \mathrm{I}_3 + \frac{4 \cdot 4^m - 1}{3} J = \mathrm{I}_3 + \frac{4^{m+1} - 1}{3} J$$

On en déduit que $\mathscr{H}(m+1)$ est vraie. Par récurrence $\mathscr{H}(m)$ est vraie pour tout $m \geqslant 1$.
Méthode 2. On commence par calculer A^m pour $m \geqslant 1$. On note que $A = I + J$ en notant $I = \mathrm{I}_3$, les matrices I et J commutent donc on peut utiliser la formule du binôme de Newton :

$$A^m = (I + J)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k I^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} J^k$$

On connait l'expression de J^k pour $k \geqslant 1$, donc on isole le terme pour $k = 0$:

$$A^m = I + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} J^k = I + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^{k-1} J = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} 3^k\right) J$$

On ajoute et on retranche dans la somme le terme pour $k = 0$ pour faire apparaitre la formule du binôme :

$$A^m = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 3^k - 1\right) J = I + \frac{4^m - 1}{3} J$$

On revient maintenant aux endomorphismes : les endomorphismes f^m et $\mathrm{id} + 3^{-1}(4^m - 1)j$ ont même matrice dans la base canonique, ils sont donc égaux. Ainsi :

$$\boxed{\forall m \geqslant 1,\ f^m = \mathrm{id} + \frac{4^m - 1}{3} j}$$

Comme $f^0 = \mathrm{id}$ et $4^0 - 1 = 0$, le résultat reste valable pour $m = 0$.

10. On calcule le polynôme caractéristique de f :

$$\chi_f(x) = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 4-x & 1 & 1 \\ 4-x & 2-x & 1 \\ 4-x & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix}$$

$$= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-4)(x-1)^2$$

Les valeurs propres de f sont donc $\lambda = 1$ et $\mu = 4$.

11. **Unicité.** On suppose que (p,q) et (p',q') sont deux couples d'endomorphismes qui conviennent. On a donc :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ f^m = \lambda^m p + \mu^m q = \lambda^m p' + \mu^m q'$$

On a en particulier $\mathrm{id} = p + q$ donc :

$$f = \lambda p + \mu q = \lambda p + \mu(\mathrm{id} - p) = (\lambda - \mu)p + \mu\,\mathrm{id}$$

et de même $\mathrm{id} = p' + q'$ donc :

$$f = \lambda p' + \mu q' = (\lambda - \mu)p' + \mu\,\mathrm{id}$$

Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on en déduit $p = p'$ puis $q = q'$ d'où l'unicité.
Existence, méthode 1. D'après ce qui précède, on a avec $\lambda = 1$ et $\mu = 4$:

$$f = -3p + 4\,\mathrm{id}$$

donc :

$$p = \frac{4\,\mathrm{id} - f}{3} \quad \text{et} \quad q = \frac{f - \mathrm{id}}{3}$$

Alors, pour tout entier $m \geqslant 0$ en utilisant la question 2) :

$$\lambda^m p + \mu^m q = p + 4^m q = \frac{4\,\mathrm{id} - f}{3} + 4^m \frac{f - \mathrm{id}}{3} = \mathrm{id} + \frac{\mathrm{id} - f}{3} + 4^m \frac{f - \mathrm{id}}{3} = \mathrm{id} + \frac{4^m - 1}{3} j = f^m$$

Le couple d'endomorphismes (p,q) convient.
Existence, méthode 2. On reprend la relation de la question 9 :

$$f^m = \mathrm{id} + \frac{4^m - 1}{3} j = \mathrm{id} + \frac{\mu^m}{3} j - \frac{1}{3} j = \lambda^m \left(\mathrm{id} - \frac{1}{3} j\right) + \mu^m \frac{1}{3} j$$

On en déduit que $\mathrm{id} - \frac{1}{3} j$ et $q = \frac{1}{3} j$ conviennent.
Existence, méthode 3. Pour cette méthode, il faut établir que f est diagonalisable. On montre qu'il existe P inversible telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a alors pour $m \in \mathbb{N}$:

$$P^{-1}A^m P = \begin{pmatrix} 4^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}) = 4^m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^m = \underbrace{P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=A_1} + 4^m \underbrace{P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{=A_2}$$

$$= \lambda^m A_1 + 4^m A_2$$

Il suffit alors de prendre p et q canoniquement associés respectivement à A_1 et A_2.

Famille (p,q) libre. On a obtenu :

$$p = \frac{4\,\mathrm{id} - f}{3} \quad \text{et} \quad q = \frac{f - \mathrm{id}}{3}$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha p + \beta q = 0$, alors :

$$\alpha \frac{4\,\mathrm{id} - f}{3} + \beta \frac{f - \mathrm{id}}{3} = \frac{4\alpha - \beta}{3}\,\mathrm{id} + \frac{\beta - \alpha}{3} f = 0$$

Comme $A \notin \mathrm{Vect}(I)$, la famille (id, f) est libre et on en déduit $4\alpha - \beta = 0$ et $\alpha - \beta = 0$ d'où $\alpha = \beta = 0$.

Conclusion. Il existe un unique couple d'endomorphismes (p,q) tel que $f^m = \lambda^m p + \mu^m q$ pour tout entier $m \geqslant 0$, de plus la famille (p,q) est libre.

12. Rappelons que d'après la question 9 :

$$f^2 = \mathrm{id} + \frac{16-1}{3} j = \mathrm{id} + 5j = \mathrm{id} + 5(f - \mathrm{id}) = 5f - 4\,\mathrm{id}$$

Avec $p = \dfrac{4\,\mathrm{id} - f}{3}$ et $q = \dfrac{f - \mathrm{id}}{3}$, il vient :

$$\begin{aligned}
p^2 &= \frac{(4\,\mathrm{id} - f)^2}{9} = \frac{16\,\mathrm{id} - 8f + f^2}{9} = \frac{16\,\mathrm{id} - 8f + 5f - 4\,\mathrm{id}}{9} = \frac{12\,\mathrm{id} - 3f}{9} = \frac{4\,\mathrm{id} - f}{3} = p \\
q^2 &= \frac{(f - \mathrm{id})^2}{9} = \frac{f^2 - 2f + \mathrm{id}}{9} = \frac{5f - 4\,\mathrm{id} - 2f + \mathrm{id}}{9} = \frac{3f - 3\,\mathrm{id}}{9} = \frac{f - \mathrm{id}}{3} = q \\
pq &= \frac{(4\,\mathrm{id} - f)(f - \mathrm{id})}{9} = \frac{5f - 4\,\mathrm{id} - f^2}{9} = 0 \\
qp &= \frac{(f - \mathrm{id})(4\,\mathrm{id} - f)}{9} = 0
\end{aligned}$$

Donc $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $qp = pq = 0$.

Rq. De plus, $p + q = \mathrm{id}$, donc p et q sont des projecteurs associés. Ce sont les projecteurs associés à la décomposition $\mathbb{R}^3 = E_1(f) \oplus E_4(f)$ (on verra plus loin que f est diagonalisable). Considérons $h \in \mathrm{Vect}(p,q)$, noté $h = \alpha p + \beta q$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Avec les calculs précédents :

$$h^2 = (\alpha p + \beta q)^2 = \alpha^2 p^2 + \alpha\beta(pq + qp) + \beta^2 q^2 = \alpha^2 p + \beta^2 q$$

La famille (p,q) est libre et $f = f^1 = p + 4q$, donc :

$$h^2 = f \iff \alpha^2 p + \beta^2 q = p + 4q \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha^2 = 1 \\ \beta^2 = 4 \end{array} \right.$$

Pour $h \in \mathrm{Vect}(p,q)$, $h^2 = f$ si, et seulement si, h est l'un des endomorphismes $p + 2q$, $-p + 2q$, $p - 2q$, $-p - 2q$.

13. On sait déjà que $\mathrm{Sp}(f)=\{1,4\}$ et pour $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_1(f) &\iff \begin{cases} 2x+y+z=x\\ x+2y+z=y\\ x+y+2z=z\end{cases} \iff x+y+z=0\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}(e_1,e_2) \text{ avec } e_1=\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} \text{ et } e_2=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\\
\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in E_4(f) &\iff \begin{cases} 2x+y+z=4x\\ x+2y+z=4y\\ x+y+2z=4z\end{cases} \iff \begin{cases} -2x+y+z=0\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=0\end{cases} \iff x=y=z\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in \mathrm{Vect}(e_3) \text{ avec } e_3=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

La famille (e_1,e_2) est libre, c'est une base de $E_1(f)$ et $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres pour f. On en déduit que f est diagonalisable et :

$$\begin{cases}
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&4\end{pmatrix}=D\\
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\dfrac{4\,\mathrm{id}-f}{3}\right)=\dfrac{4I-D}{3}=\begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\\
\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(q)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\dfrac{f-\mathrm{id}}{3}\right)=\dfrac{D-I}{3}=\begin{pmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}
\end{cases}$$

14. **Recherche d'une matrice K de taille 2 telle que $K^2=\mathrm{I}_2$.** On peut par exemple chercher cette matrice avec des coefficients. On ne veut pas qu'elle soit diagonale, on va chercher une matrice triangulaire :

$$K=\begin{pmatrix} a&b\\ 0&c\end{pmatrix}$$
$$K^2=\begin{pmatrix} a^2&(a+c)b\\ 0&c^2\end{pmatrix}$$

Il suffit par exemple de prendre $a=1$, $c=-1$ et $b=1$. On trouve donc que $K^2=\mathrm{I}_2$ avec $K=\begin{pmatrix} 1&1\\ 0&-1\end{pmatrix}$.

On peut également prendre par exemple $K^2=\mathrm{I}_2$ avec $K=\begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0\end{pmatrix}$.

La matrice Y**.** On peut la construire à partir de K. Par exemple, $Y^2 = D$ avec $Y = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (matrices par blocs).

15. Notons h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h) = Y$. On a bien $h^2 = f$ et h n'est pas combinaison linéaire de p et q (sinon, la matrice dans $\mathscr{B}$ de h serait diagonale puisque les matrices de p et q dans $\mathscr{B}$ le sont).

16. Considérons un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ tel que $h^2 = f$. Comme $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 4\}$ et f est diagonalisable, le polynôme $P = (X-1)(X-4)$ est annulateur de f. Ce polynôme est donc annulateur de h^2 on a donc :

$$P(h^2) = (h^2 - \mathrm{id})(h^2 - 4\,\mathrm{id}) = 0$$

Le polynôme $Q = (X^2-1)(X^2-4)$ est donc annulateur de h. Or :

$$Q = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$$

Le polynôme Q est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}$ donc h est diagonalisable.

Partie 2 Sous-espaces stables

17. On suppose que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_i)$. Soit $x \in F$, il existe alors $x_1, \dots, x_p$ tels que :

$$x = x_1 + \cdots + x_p \quad \text{et} \quad (x_1, \dots, x_p) \in (F \cap E_1, \dots, F \cap E_p)$$

Par linéarité de f :

$$f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_p)$$

Pour $i \in [\![1, p]\!]$, on a $x_i \in E_i$ donc $f(x_i) = \lambda_i x_i$ et $\lambda_i x_i \in E_i$ et $\lambda_i x_i \in F$ car E_i et F sont des sous-espaces vectoriels. Ainsi, $f(x_i) \in F \cap E_i$ et $f(x) \in F$. Par conséquent, F est stable par f.

18. Comme f est diagonalisable, ses sous-espaces propres $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces supplémentaires de E. Par conséquent, il existe un unique $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.

19. La famille $\mathscr{B}_x$ est par définition génératrice de V_x. On considère $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_r x_r = 0$$

On a $\alpha_i x_i \in E_i$ pour tout $i \in [\![1, r]\!]$. On sait que de plus que la somme $E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$ est directe. On en déduit que $\alpha_1 x_1 = \cdots = \alpha_r x_r = 0$. De plus, $x_1, \dots, x_r$ sont non nuls donc $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. La famille $\mathscr{B}_x$ est par conséquent libre. On en déduit que $\mathscr{B}_x$ est une base de V_x.

20. Pour un vecteur propre u de f associé à une valeur propre λ et $k \in \mathbb{N}$, on a $f^k(u) = \lambda^k u$. Ici on a :

$$x = x_1 + \cdots + x_r$$

et $x_1, \dots, x_r$ sont des vecteurs propres pour f. Soit $k \in \mathbb{N}$, en appliquant f^k on obtient :

$$f^k(x) = f^k(x_1) + \cdots + f^k(x_r) = \lambda_1^k x_1 + \lambda_r^k x_r$$

de sorte que $f^k(x) \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_r) = V_x$. En particulier, pour $j \in [\![1, r]\!]$, on obtient $f^{j-1}(x) \in V_x$ et :

$$f^{j-1}(x) = \lambda_1^{j-1} x_1 + \lambda_r^{j-1} x_r$$

ou encore $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{j-1}(x)) = \begin{pmatrix} \lambda_1^{j-1} \\ \vdots \\ \lambda_r^{j-1} \end{pmatrix}$ puis $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f^{j-1}(x))_{1 \leqslant j \leqslant r} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}$. .

21. Considérons la famille $\mathcal{V} = (f^0(x), \dots, f^{r-1}(x))$, c'est une famille de r éléments de V_x et $\dim V_x = r$ car $(x_1, \dots, x_r)$ est une base de V_x. De plus :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{V}) = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^0(x), \dots, f^{r-1}(x)) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{r-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{r-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_r & \cdots & \lambda_r^{r-1} \end{vmatrix}$$

On reconnait un déterminant de Vandermonde qui est non nul puisque $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont distincts. Par conséquent, $\mathcal{V}$ est une base de V_x.

22. Chaque vecteur x_i appartient à V_x et $\mathcal{V}$ est une base de V_x, donc chaque vecteur x_i est combinaison linéaire de $x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)$. Comme F est stable par f, $x, f(x), \dots, f^{r-1}(x)$ appartiennent tous à F et ainsi $x_i \in F$ (comme combinaison linéaire d'éléments de F). On en déduit que $x_i \in E_i \cap F$ et ainsi :

$$x \in (E_1 \cap F) + \cdots + (E_p \cap F)$$

Ceci étant vrai quel que soit $x \in F$, on en déduit que :

$$F \subset (E_1 \cap F) + \cdots + (E_p \cap F)$$

et comme l'inclusion réciproque est évidente, on a l'égalité :

$$F = (E_1 \cap F) + \cdots + (E_p \cap F)$$

De plus, cette somme est directe (car la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe), donc :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{p} (E_i \cap F)$$

23. Comme $p = n = \dim E$, l'endomorphisme f possède n valeurs propres distinctes et ses sous-espaces propres sont des droites, *i.e.* $\dim E_i = 1$ quel que soit $i \in [\![1, p]\!]$.

24. Chaque sous-espace propre de f est une droite stable par f. Réciproquement, on sait qu'une droite stable par f est engendrée par un vecteur propre (question 1) et est donc contenue dans un sous-espace propre. Comme les sous-espaces propres sont de dimension 1, on a nécessairement égalité : chaque droite stable par f est égale à un sous-espace propre de f. Par conséquent, les droites stables par f sont les sous-espaces propres de f, il y en a donc n.

25. Considérons F sous-espace stable par f et de dimension k. D'après ce qui précède :

$$F = \bigoplus_{i=1}^{n} (F \cap E_i)$$

mais pour $i \in [\![1, n]\!]$, E_i est de dimension 1 donc soit $F \cap E_i = \{0\}$, soit $F \cap E_i = E_i$. Si on note $I = \{i \in [\![1, n]\!] \mid F \cap E_i \neq \{0\}\}$ on a alors :

$$F = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

et comme la somme est directe et $\dim F = k$, on a également $\operatorname{card} I = k$. Réciproquement, il est clair que si $I \subset [\![1, n]\!]$, $\operatorname{card} I = k$ et $F = \oplus_{i \in I} E_i$, alors F est stable par f et $\dim F = k$. Les sous-espaces F stables par f et de dimension k sont ceux qui s'écrivent

$$F = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

avec $I \subset [\![1, n]\!]$ et $\operatorname{card} I = k$. Le nombre de ces sous-espaces stables est égal au nombre de parties de $[\![1, n]\!]$ à k éléments, c'est à dire $\binom{n}{k}$.

26. Avec les résultats des questions précédentes et sachant que $\{0\}$ et E sont stables par f, on obtient le résultat suivant : les sous-espaces F de E stables par f sont les sous-espaces

$$F = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

avec $I \subset [\![1, n]\!]$. Le cas $I = \emptyset$ correspond à $F = \{0\}$, le cas $I = [\![1, n]\!]$ correspond à $F = E$ et lorsque $\operatorname{card} I = 1$, on obtient les droites vectorielles stables par f. Le nombre de sous-espaces stables par f est égal au nombre de parties de $[\![1, n]\!]$, c'est à dire 2^n.

Partie 3 Commutant

27. Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{aligned} 2x + 10y + 7z &= 0 \\ x + 4y + 3z &= 0 \\ -2x - 8y - 6z &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x + 4y + 3z &= 0 \\ 2x + 10y + 7z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} x + 4y + 3z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x + z &= 0 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned} \right. \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ -2y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Vect}(u)$$

On en déduit que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect} u$.

28. On a $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$ donc l'endomorphisme f n'est pas injectif, donc f n'est pas un automorphisme donc A n'est pas inversible.

29. On considère $v = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f(v) = u \iff Av = u \iff \left\{ \begin{aligned} 2x + 10 + 7z &= 2 \\ x + 4 + 3z &= 1 \\ -2x - 8 - 6z &= -2 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x + 4 + 3z &= 1 \\ 2x + 10 + 7z &= 2 \\ 2y + z &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} x + 4 + 3z &= 1 \\ 2 + z &= 0 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x &= 3 \\ z &= -2 \end{aligned} \right.$$

La solution est $\boxed{v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}$.

30. On considère $w = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$f(w) = v \iff Aw = v \iff \left\{ \begin{aligned} 2x + 10 + 7z &= 3 \\ x + 4 + 3z &= 1 \\ -2x - 8 - 6z &= -2 \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} x + 4 + 3z &= 1 \\ 2x + 10 + 7z &= 2 \\ 2 + z &= 1 \end{aligned} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{aligned} z &= -1 \\ x &= 0 \end{aligned} \right.$$

La solution est $\boxed{w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$.

31. On pose $\mathscr{B}' = (u, v, w)$. On a :

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

32. On a $f(u) = 0$, $f(v) = u$ et $f(w) = v$ donc :

$$\boxed{N = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

On a immédiatement $\chi_N = \chi_f = X^3$ donc $\mathrm{Sp}(N) = \mathrm{Sp}(f) = \{0\}$. Supposons N est diagonalisable, alors N est semblable à la matrice nulle donc $N = 0$ d'où une contradiction. Par conséquent f n'est pas diagonalisable.

33. On sait que $A = PNP^{-1}$. On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PN^kP^{-1}$. Par un calcul direct, on a $N^3 = 0$ donc pour tout $k \geqslant 3$, $N^k = 0$ et $A^k = 0$.

34. Par définition, $C_N \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. De plus, I commute avec N donc $C_n \neq \emptyset$. Considérons $M, M' \in C_N$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$(\lambda M + M')N = \lambda MN + M'N = \lambda NM + NM' = N(\lambda M + M')$$

Ainsi, $\lambda M + M' \in C_N$. Ceci montre que C_N est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Considérons $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$MN - NM = \begin{pmatrix} 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & m_{21} & m_{22} \\ 0 & m_{31} & m_{32} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc :

$$\boxed{M \in C_N \iff \left\{ \begin{array}{r} m_{21} = m_{31} = m_{32} = 0 \\ m_{11} = m_{22} = m_{33} \\ m_{12} = m_{23} \end{array} \right. \iff M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ 0 & m_{11} & m_{12} \\ 0 & 0 & m_{11} \end{pmatrix} \iff M \in \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_3, N, N^2)}$$

35. On a :

$$\boxed{M \in C_A \iff AM = MA \iff PNP^{-1}M = MPNP^{-1} \iff NP^{-1}MP = P^{-1}MPN \iff P^{-1}MP \in C_N}$$

On poursuit avec $C_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$:

$$\begin{aligned} M \in C_A &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ P^{-1}MP = aI + bN + cN^2 \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = aPIP^{-1} + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} \\ &\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R},\ M = aI + bA + cA^2 \\ &\iff M \in \mathrm{Vect}(I, A, A^2) \end{aligned}$$

On a donc $C_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$. Considérons une combinaison linéaire nulle :

$$a\mathrm{I}_3 + bA + cA^2 = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Autrement dit :

$$a\mathrm{I}_3 + bPNP^{-1} + cPN^2P^{-1} = 0$$

On multiplie à cauche par P^{-1} et à droite par P :

$$a\mathrm{I}_3 + bN + cN^2 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = 0$$

On en déduit que $a = b = c = 0$. Ainsi, (I_3, A, A^2) est libre. Cette famille est par conséquent une base de C_A donc $\dim C_A = 3$.

Partie 4 Système d'équations différentielles

36. On note que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sachant que $f^{(3)} = f$, on a :

$$g' = f' + f'' + f^{(3)} = f' + f'' + f = g$$

Ainsi, g est solution de l'équation différentielle (linéaire, homogène, du premier ordre) $y' = y$ notée (E_2).

37. Les solutions de (E_2) sont les fonctions $g : t \mapsto C\mathrm{e}^t$ avec $C \in \mathbb{C}$.

38. Comme $f + f' + f'' = C\mathrm{e}^t$, on en déduit que f est solution de l'équation différentielle (linéaire, du deuxième ordre) $y'' + y' + y = C\mathrm{e}^t$.
Équation homogène $y'' + y' + y = 0$. Équation caractéristique $r^2 + r + 1 = 0$ donc les racines sont j et $\overline{j}$ avec :

$$j = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/3}$$

Les solutions de $y'' + y' + y = 0$ sont les fonctions :

$$y : t \mapsto A\mathrm{e}^{jt} + B\mathrm{e}^{\overline{j}t}$$

avec $A, B \in \mathbb{C}$.
Solution particulière, recherchée sous la forme $y : t \mapsto K\mathrm{e}^t$. On trouve que $K = C/3$ convient.
Conclusion. Les solutions de (E_1) sont les fonctions :

$$\boxed{f : t \in \mathbb{R} \mapsto A\mathrm{e}^{jt} + B\mathrm{e}^{\overline{j}t} + \frac{C}{3}\mathrm{e}^t, \quad A, B, C \in \mathbb{C}}$$

' En toute rigueur il faudrait étudier la réciproque.

39. On détermine le polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= -\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 0 \\ 1-x & -x & 1 \\ 1-x & 0 & -x \end{vmatrix}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix}_{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3} \\
&= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -x-1 & 1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix}_{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \\
&= (x-1)(x(x+1)+1) = x^3 - 1
\end{aligned}$$

Le polynôme χ_A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, ses racines sont les éléments de $\mathbb{U}_3$ c'est à dire $1, j, \overline{j}$ avec $j = e^{2i\pi/3}$. Par conséquent, A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

40. On note $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP = D$ avec $D = \text{diag}(1, j, \overline{j})$. On a alors :

$$(S) \iff X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff P^{-1}X' = DP^{-1}X$$

On pose $Y = P^{-1}X$. On a alors $Y' = P^{-1}X'$ et :

$$(S) \iff Y' = DY$$

Notons $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$, alors :

$$(S) \iff \begin{cases} u' = u \\ v' = jv \\ w' = jw \end{cases} \qquad (S')$$

Les solutions de (S') sont les fonctions :

$$u : t \mapsto \alpha e^t$$
$$v : t \mapsto \beta e^{jt}$$
$$w : t \mapsto \gamma e^{\overline{j}t}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Comme $X = PY$, les solutions de (S) sont les fonctions :

$$\boxed{X : t \mapsto P \begin{pmatrix} \alpha e^t \\ \beta e^{jt} \\ \gamma e^{\overline{j}t} \end{pmatrix}}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. ' Pour préciser les solutions, il faut expliciter P (inutile cependant de déterminer P^{-1}).

41. Si on prend $X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}$ alors : X solution de $(S) \Leftrightarrow f^{(3)} = f \Leftrightarrow f$ solution de (E_1).

42. On reprend la solution X trouvée à la question 40. On note $p_{11}, p_{12}, p_{13} \in \mathbb{C}$ les coefficients de la première ligne de P. On obtient que la première composante de X est :

$$p_{11}\alpha e^t + p_{12}\beta e^{jt} + p_{13}\gamma e^{\overline{j}t}$$

ce qui donne bien une solution de (E_1) comme obtenue à la question 38.