DM 5 pour le Vendredi 17 janvier 2025 **PC***

Pensez à laisser une marge sur les copies, au minimum 5 cm.*Le but de ce sujet est de montrer sur des exemples comment il est possible d'obtenir des solutions de certains problèmes par approximations successives en utilisant des suites ou des séries de fonctions.*

Partie 1 Premier exemple, avec des suites de fonctions

Soit $\gamma \in]0,1[$. *On veut déterminer s'il existe des fonctions u qui vérifient les conditions suivantes :*

(i) *u est de classe* C^1 *sur* $[0,1]$ *;*

(ii) $u(0) = 1$ *;*

(iii) $\forall x \in [0,1],\ u'(x) = u(\gamma x)$.

On notera que la condition (iii) constitue une équation différentielle mais elle ne rentre pas dans le cadre étudié en première année et les méthodes de résolutions ne s'appliquent pas.

1. Démontrer qu'une fonction u vérifie les trois conditions *(i), (ii), (iii)* si, et seulement si, elle vérifie les deux conditions (a) et (b) suivantes :

(a) u est continue sur $[0,1]$;

(b) $\forall x \in [0,1],\ u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$.

(on dit que le problème de départ est formulé sous forme intégrale).

Pour $u \in C([0,1])$, *on définit une application notée* Tu *en posant :*

$$\forall x \in [0,1],\ Tu(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

On admet dans la suite que ceci permet de définir une application :

$$T : \begin{array}{ccc} C([0,1]) & \to & C([0,1]) \\ u & \mapsto & \left[\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & Tu(x) \end{array}\right] \end{array}$$

Résoudre le problème de départ revient donc à déterminer une fonction u telle que $Tu = u$. Le principe est alors de définir une suite (u_n) par récurrence en posant $u_{n+1} = T(u_n)$. On part de $u_0 : x \mapsto 0$ et on définit donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

2. Expliciter u_1 et u_2.

3. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \dfrac{x^n}{n!}$.

4. Démontrer que la série de fonctions $\sum (u_{n+1}(x) - u_n(x))$ converge normalement sur $[0,1]$.

On pose, pour $x \in [0,1]$, $u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x))$.

5. Démontrer que la fonction u est continue sur $[0,1]$.

6. Démontrer que : $\forall x \in [0,1],\ u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$. Conclure.

Partie 2 Deuxième exemple, avec des séries de fonctions (CCINP PC 2021)

Dans cette partie, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad et \quad \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad (P)$$

***Existence de la solution du problème (P)** et expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.*
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

7. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans la suite, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$.

8. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

9. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

10. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

Unicité de la solution.

11. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

12. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Étude de la solution du problème (P).

Dans la suite, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

13. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

14. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$.

15. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

16. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

17. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

18. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

19. En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Correction DM 5 – CCP PC 2021 (partie 2)

Partie 1 Premier exemple, avec des suites de fonctions

1. On procède par double implication. On suppose que u vérifie les conditions *(i), (ii), (iii)*. Comme u est de classe C^1 sur $[0,1]$ (condition *(i)*), elle est en particulier continue sur $[0,1]$ donc la condition (a) est vérifiée. Toujours en utilisant le fait que u est de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) = u(0) + \int_0^x u'(t)\,\mathrm{d}t$$

Or $u(0) = 1$ (condition *(ii)*) et $u'(t) = u(\gamma t)$ quel que soit $t \in [0,1]$ (condition *(iii)*). Ainsi :

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

et la condition (b) est vérifiée. Réciproquement, supposons que u vérifie les conditions (a) et (b). Considérons la fonction $v : t \in [0,1] \mapsto u(\gamma t)$. La fonction v est continue sur $[0,1]$ comme composée de fonctions continues. Dans ce cas, l'application $x \in [0,1] \mapsto \int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de v qui s'annule en 0. On en déduit que $u : x \mapsto 1 + \int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de v qui prend la valeur 1 en 0 et en particulier, u est de classe C^1 sur $[0,1]$, $u(0) = 1$ et :

$$\forall x \in [0,1],\ u'(x) = v(x) = u(\gamma x)$$

Les conditions *(i), (ii), (iii)* sont donc vérifiées. Par conséquent, on a équivalence entre les conditions (a), (b) et les conditions *(i), (ii), (iii)*.

2. Par définition :

$$\forall x \in [0,1],\ u_1(x) = 1 + \int_0^x u_0(\gamma t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 1$$
$$u_2(x) = 1 + \int_0^x u_1(\gamma t)\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = 1 + x$$

On a : $\forall x \in [0,1]$, $u_1(x) = 1$ et $u_2(x) = 1 + x$.

3. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(n) : \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

D'après la question précédente, on a $0 \leqslant u_1(x) - u_0(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$ donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathscr{H}(n)$. Pour $x \in [0,1]$:

$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_{n+1}(\gamma t)\,\mathrm{d}t - 1 - \int_0^x u_n(\gamma t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \big(u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \leqslant \frac{(\gamma t)^n}{n!}$$

et sachant que $\gamma \in]0,1[$, on a $0 \leqslant \gamma t \leqslant t$ donc :

$$\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \leqslant \frac{t^n}{n!}$$

Par croissance de l'intégrale (avec $x \in [0,1]$, donc $0 \leqslant x$) :

$$0 = \int_0^x 0 \, \mathrm{d}t \leqslant u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x \big(u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\big) \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!} \, \mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n+1!}$$

et $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, on a démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ 0 \leqslant u_{n+1}(x) - u_n(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}$$

4. **D'après la question précédente :**

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant \frac{x^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n!} \quad \textbf{(indépendant de } x\textbf{)}$$

Ainsi, $\frac{1}{n!}$ est un majorant de $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$, $x \in [0,1]$.
On sait que $\|u_{n+1} - u_n\|_{\infty,[0,1]}$ est le plus petit majorant de $|u_{n+1}(x) - u_n(x)|$, $x \in [0,1]$.

On en déduit :

$$\|u_{n+1} - u_n\|_{\infty,[0,1]} \leqslant \frac{1}{n!}$$

La série exponentielle $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \|u_{n+1} - u_n\|_{\infty,[0,1]}$ converge.
Par conséquent, la série de fonctions $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $[0,1]$.

5. Il est admis dans l'énoncé que si u est une fonction continue sur $[0,1]$, alors il en est de même de Tu. Or u_0 est une fonction continue sur $[0,1]$ donc, par récurrence, chaque fonction u_n est continue sur $[0,1]$ et chaque fonction $u_{n+1} - u_n$ est continue sur $[0,1]$. Avec le résultat de la question 4, la série de fonctions $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge normalement sur $[0,1]$. Par conséquent, sa somme u est continue sur $[0,1]$.

6. Soit $x \in [0,1]$. On a tout d'abord :

$$\int_0^x u(\gamma t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t) \right) \mathrm{d}t$$

Or chaque fonction $v_n : t \mapsto u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)$ est continue sur $[0,1]$ et :

$$\forall t \in [0,1],\ |v_n(t)| = \big|u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)\big| \leqslant \frac{\gamma^n t^n}{n!} \leqslant \frac{1}{n!} \quad \text{(indépendant de } x\text{)}$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum v_n$ converge normalement sur $[0,1]$. On utilise alors le théorème d'échange série intégrale sur un segment avec convergence uniforme :

$$\int_0^x u(\gamma t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x (u_{n+1}(\gamma t) - u_n(\gamma t)) \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x u_{n+1}(\gamma t) \, \mathrm{d}t - \int_0^1 u_n(\gamma t) \, \mathrm{d}t \right)$$

On utilise la définition de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned}\int_0^x u(\gamma t) \, \mathrm{d}t &= \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_{n+1}(x) - u_n(x)) \\ &= u - (u_1(x) - u_0(x)) = u(x) - 1\end{aligned}$$

et ainsi :

$$\forall x \in [0,1],\ u(x) = 1 + \int_0^x u(\gamma t)\,\mathrm{d}t$$

La fonction u vérifie les conditions (a) et (b), donc elle vérifie également les conditions *(i), (ii), (iii)*. La fonction u est donc solution du problème de départ.

Partie 2 Deuxième exemple, avec des séries de fonctions (CCINP PC 2021)

7. Pour $x > 0$:

$$\left|\varphi_k(x)\right| = \frac{1}{(x+k)^k} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$$

La série de Riemann $\sum 1/k^2$ converge donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum \varphi_k(x)$ converge. Ceci est vrai quel que soit $x > 0$ donc la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

8. Soit $x > 0$, on réalise un changement d'indice :

$$\begin{aligned}\varphi(x+1)+\varphi(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k+1)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\ &= -\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\end{aligned}$$

On a donc $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

9. Soit $x > 0$. Le théorème étantt explicitement demandé dans l'énoncé, il vaut mieux vérifier soigneusement ses hypothèses :

- $(-1)^k\varphi_k(x) = \dfrac{1}{(x+k)^2}$ est de signe constant positif;
- $\left|\varphi_k(x)\right| = \dfrac{1}{(x+k)^2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$;
- Pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\left|\varphi_{k+1}(x)\right| - \left|\varphi_k(x)\right| = \frac{1}{(x+k+1)^2} - \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant 0 \quad \text{car } x+k+1 > x+k$$

On peut donc appliquer le théorème des séries alternées à la série $\sum \varphi_k(x)$ et en particulier la majoration du reste :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right| \leqslant \left|\varphi_{n+1}(x)\right| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

10. Avec le résultat obtenu à la question 10, il ne reste plus qu'à montrer que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Méthode 1 : double limite et convergence uniforme.

On reprend la majoration de la question précédente :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} \quad \textbf{(indépendant de } x\textbf{)}$$

Or $\left\|\varphi-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right\|_{\infty,\mathbb{R}^{+*}}$ **est le plus petit majorant de** $\left|\varphi(x)-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(x)\right|$**,** $x\in\mathbb{R}^{+*}$ **donc**

$$\left\|\varphi-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right\|_{\infty,\mathbb{R}^{+*}}\leqslant\frac{1}{n+1}$$

On a $\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ **donc par encadrement :**

$$\left\|\varphi-\sum_{k=0}^{n}\varphi_k\right\|_{\infty,\mathbb{R}^{+*}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

La série de fonctions $\sum\varphi_k$ **converge donc uniformément sur** $]0,+\infty[$**.**

On a de plus :

$$\forall k\in\mathbb{N},\ \varphi_k(x)=\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

D'après le théorème de la double limite :

$$\varphi(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Méthode 2 : uniquement avec des encadrements. On reprend la majoration de la question précédente, avec $n=0$:

$$\forall x\in\,]0,+\infty[,\ \left|\varphi(x)-\varphi_0(x)\right|\leqslant\frac{1}{(x+1)^2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\varphi(x)-\varphi_0(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Avec cette limite et le résultat de la question 10, on obtient que φ est solution de (P).

11. Soit f une solution de (P). Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(n):\forall x\in\,]0,+\infty[,\ f(x)=(-1)^{n+1}f(x+n+1)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

Comme f est solution de (P), on a :

$$\forall x>0,\ f(x)=(-1)^1f(x+1)+\frac{1}{x^2}$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $n\in\mathbb{N}$, on suppose que $\mathscr{H}(n)$ est vraie. On a alors pour $x>0$:

$$\begin{aligned}f(x)&=(-1)^{n+1}f(x+n+1)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\&=(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{(x+n+1)^2}-f(x+n+2)\right)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\&=\frac{(-1)^{n+1}}{(x+n+1)^2}+(-1)^{n+2}f(x+n+2)+\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\\&=(-1)^{n+2}f(x+n+2)+\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\end{aligned}$$

donc $\mathscr{H}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

12. Soit f une solution de (P). Pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$$

Comme f est solution de (P) :

$$f(x+n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

De plus, d'après l'étude de la série de fonctions :

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(x)$$

Par passage à la limite dans l'égalité plus haut, on obtient :

$$f(x) = \varphi(x)$$

Ceci est vrai quel que soit $x > 0$ donc $f = \varphi$. On a déjà constaté que φ est solution de (P) et ceci montre que φ est la seule solution de (P).

13. **Méthode 1 :** on a obtenu à la question 12 que la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$, *a fortiori* elle converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Méthode 2 : avec convergence normale. On a :

$$\forall x \in [\varepsilon,+\infty[,\ \forall k \in \mathbb{N},\ \left|\varphi_k(x)\right| = \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2} \quad \text{(indépendant de } x\text{)}$$

On a donc :

$$\left\|\varphi_k\right\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$$

Or

$$\frac{1}{(\varepsilon+k)^2} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{k^2} \text{ converge}$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 1/(\varepsilon+k)^2$ converge puis $\sum \varphi_k$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\varepsilon,+\infty[$.

14. **Chaque fonction φ_k est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$ et la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$. D'après le théorème de continuité, φ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$. Ceci est vrai quel que soit $\varepsilon > 0$ donc φ est continue sur $]0,+\infty[$.**

15. On a pour tout $x > 0$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^2} - \varphi(x+1)$$

Comme φ est continue sur $]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1) \xrightarrow[x\to 0]{} \varphi(1)$ limite finie. De plus, $1/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. On a donc :

$$\varphi(x+1) = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2} - \varphi(x+1) = \dfrac{1}{x^2} - \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et ainsi :

$$\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$$

16. Chaque fonction φ_k est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \varphi_k'(x) = \frac{-2(-1)^k}{(x+k)^3}$$

La série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. Soit $\varepsilon>0$. On a :

$$\forall x\in[\varepsilon,+\infty[,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \left|\varphi_k'(x)\right| = \frac{2}{(x+k)^3} \leqslant \frac{2}{(\varepsilon+k)^3} \quad \text{(indépendant de } x\text{)}$$

On a donc :

$$\|\varphi_k'\|_{\infty,[\varepsilon,+\infty[} \leqslant \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$$

Or

$$\frac{2}{(\varepsilon+k)^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^3} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{k^3} \text{ converge}$$

donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum 2/(\varepsilon+k)^3$ converge puis $\sum \varphi_k'$ converge normalement sur $[\varepsilon,+\infty[$. D'après le théorème de classe C^1, φ est de classe C^1 sur $[\varepsilon,+\infty[$. Ceci est vrai quel que soit $\varepsilon>0$ donc φ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et :

$$\forall x>0,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

17. Soit $x>0$. La suite $(2/(x+k)^3)_{k\geqslant 0}$ est décroissante, positive et converge vers 0. Le théorème des séries alternées s'applique et, en particulier, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x)$ est du signe de sont premier terme. On a donc $\varphi'(x)$ de même signe que $\varphi_0'(x)$ c'est à dire $\varphi'(x)\leqslant 0$. Par conséquent φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

18. Soit $x>0$. Comme φ est décroissante, on a :

$$2\varphi(x+1) \leqslant \varphi(x+1)+\varphi(x) \leqslant 2\varphi(x)$$

donc :

$$2\varphi(x+1) \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x)$$

On prend $x>1$ et on applique la première inégalité en $x-1$, on obtient :

$$2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

On a donc finalement $\dfrac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{(x-1)^2}$ puis :

$$\frac{1}{2x^2} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{1}{2(x-1)^2}$$

19. On a $\frac{1}{2(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}$ donc par encadrement :

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x^2}}$$