DM 3 pour le Vendredi 15 novembre 2024 **PC***

Pensez à laisser une marge sur les copies, au minimum 5 cm.*L'objet du problème est l'étude d'une famille de polynômes appelés polynômes de Hilbert. La première partie introduit ces polynômes de manière algébrique. Les parties suivantes concernent des applications.*

Partie 1

Étant donné $Q \in \mathbb{R}[X]$, on se propose de déterminer tous les polynômes P vérifiant :

$$P(X+1) - P(X) = Q(X)$$

À cet effet, on introduit l'application Δ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$ par la relation :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Pour un entier naturel r non nul, on notera Δ_r l'application de $\mathbb{R}_r[X]$ dans lui-même définie lorsque $P \in \mathbb{R}_r[X]$ par la relation $\Delta_r(P)(X) = P(X+1) - P(X)$.
On adopte la notation usuelle $\Delta^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}[X]}$ et $\Delta^n = \Delta \circ \Delta^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré r strictement positif, calculer le degré du polynôme $\Delta(P)$.

3. Montrer alors que le noyau de Δ est l'ensemble des polynômes constants.

4. Pour $r \in \mathbb{N}^*$, justifier la définition de Δ_r et montrer que Δ_r est linéaire.

5. Déterminer le noyau de Δ_r et montrer alors que $\operatorname{Im}\Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

6. En déduire que l'application Δ est surjective.

7. Démontrer que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

On en déduit qu'il existe une unique suite $(N_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$N_0 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \Delta(N_n) = N_{n-1} \quad \text{et} \quad N_n(0) = 0$$

On dit alors que N_n est le polynôme de Hilbert d'indice n.

8. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul :

$$N_n(X) = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} = \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$$

9. Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_n)_{n\in[\![0,r]\!]}$ forme une base de $\mathbb{R}_r[X]$.

10. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, déterminer $\Delta^k(N_n)$. On distinguera suivant que $k = n$, $k > n$ et $k < n$.

11. Prouver que pour tout polynôme Q de degré r :

$$Q = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

Justifier ensuite l'écriture $Q = \sum_{n=0}^{+\infty} \Delta^n(Q)(0) N_n$.

12. Le polynôme Q étant ainsi décomposé, déterminer tous les polynômes P vérifiant la relation $P(X+1) - P(X) = Q(X)$.

13. **Une première application.** En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ une expression simple de

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k)$$

faisant intervenir P. Utiliser ceci pour obtenir une expression de $\sum_{k=0}^{n} k^2$.

14. Établir, pour tout polynôme Q et pour tout entier naturel n, la relation :

$$\Delta^n(Q) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} Q(X+i)$$

Partie 2 Commutant de Δ

Dans toute cette partie, on suppose que $r \in \mathbb{N}^*$. On note $C(\Delta_r)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}_r[X]$ qui commutent avec Δ_r, c'est à dire :

$$C(\Delta_r) = \left\{ g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_r[X]) \mid g \circ \Delta_r = \Delta_r \circ g \right\}$$

15. Démontrer que $C(\Delta_r)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_d[X])$.

16. Pour g et h appartenant à $C(\Delta_r)$, montrer que si $g(N_r) = h(N_r)$ alors $g = h$.

17. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}_r[X]$. Justifier l'existence de réels $a_0, a_1, \ldots, a_r$ tels que :

$$g(N_r) = a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \cdots + a_1 N_1 + a_0 N_0$$

18. En déduire que $C(\Delta_r)$ est de dimension $r+1$ et qu'il admet pour base :

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_r[X]}, \Delta_r, \Delta_r^2, \ldots, \Delta_r^r \right)$$

Partie 3 Application à l'interpolation

On considère dans cette partie une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ainsi qu'un entier naturel n et on s'intéresse aux polynômes P tels que $P(0) = f(0), \ldots, P(n) = f(n)$. On dit qu'un tel polynôme réalise une interpolation de f aux points d'abscisses $0, 1, \ldots, n$.

19. Démontrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$. En déduire qu'il existe un unique polynôme P tel que : $\deg P \leqslant n$ et $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) = f(k)$.

On définit une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(i)$$

20. Soit $b > 0$. Préciser la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque f est l'application $x \mapsto b^x$.

21. Pour n entier naturel, on note P le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k N_k$$

Justifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \Delta^k(P)(0)$. Montrer alors que le polynôme P réalise une interpolation de f aux points d'abscisses $0, 1, \ldots, n$.

22. On considère dans cette question la fonction $f : x \mapsto \cos x$. Écrire un programme PYTHON permettant de tracer simultanément la fonction f ainsi que le polynôme P de degré inférieur à 3 qui réalise l'interpolation de f aux points d'abscisses $0, 1, 2, 3$.

Partie 4 Polynômes à valeurs entières

On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est à valeurs entières lorsque pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $P(k) \in \mathbb{Z}$. On notera plus simplement $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

23. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $N_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![0, n-1]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.

24. En déduire que $N_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est à dire que N_n est à valeurs entières.

25. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à valeurs entières. Montrer que $\Delta(P)$ est également à valeurs entières.

26. Montrer que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières si, et seulement si, ses coordonnées dans la base $(N_0, \ldots, N_n)$ sont des entiers.

Correction DM 3 – Essec ECS 2008 Épreuve 1 adaptée

Partie 1

1. Tout d'abord, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(X+1)$ est également un polynôme, donc ΔP est un polynôme. De plus, pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda P+Q)(X) &= (\lambda P+Q)(X+1)-(\lambda P+Q)(X) = \lambda(P(X+1)-P(X))+Q(X+1)-Q(X)\\ &= \lambda\Delta P(X)+\Delta Q(X)\end{aligned}$$

Donc $\Delta(\lambda P+Q) = \lambda\Delta P+\Delta Q$ ce qui montre que Δ est linéaire. Par conséquent Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ avec $r = \deg P > 0$. On note P sous la forme :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{r} a_k x^k$$

avec $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ et $a_r \neq 0$. Alors par linéarité :

$$\Delta P(X) = \sum_{k=0}^{r} a_k((X+1)^k - X^k) = \sum_{k=1}^{r} a_k((X+1)^k - X^k)$$

car $(X+1)^0 - X^0 = 0$. Avec la formule du binôme, pour $k \in [\![1, r]\!]$:

$$(X+1)^k - X^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} X^p - X^k = \sum_{p=0}^{k-1} \binom{k}{p} X^k$$

Ainsi, $(X+1)^k - X^k$ est de degré $k-1$. On en déduit que $\deg \Delta P \leqslant r-1$. De plus :

$$\Delta P(X) = a_r((X+1)^r - X^k) + \sum_{k=1}^{r-1} a_k((X+1)^k - X^k)$$

avec $a_r((X+1)^r - X^r)$ de degré $r-1$ et la somme quit suit est de degré inférieur à $r-2$, on obtient $\deg \Delta P = r-1 = \deg P - 1$. En conclusion, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $\deg P > 0$, alors $\deg \Delta P = \deg P - 1$.

3. Si P est non constant, alors $r = \deg P$ est strictement positif et $\deg \Delta P = r-1 \geqslant 0$ donc $\Delta P \neq 0$. Si P est constant, alors $\Delta P = 0$. Par conséquent, le noyau de Δ est $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des polynômes constants).

4. Soit $P \in \mathbb{R}_r[X]$. Si P est de degré strictement positif, alors $\deg \Delta P \leqslant \deg P \leqslant r$ d'après la question 2 donc $\Delta P \in \mathbb{R}_r[X]$. Si P est constant, alors $\Delta P = 0$ et ainsi $\Delta P \in \mathbb{R}_r[X]$. Finalement, on a $\Delta P \in \mathbb{R}_r[X]$ quel que soit $P \in \mathbb{R}_r[X]$. L'espace $\mathbb{R}_r[X]$ est donc stable par Δ et ainsi Δ_r est l'endomorphisme de $\mathbb{R}_r[X]$ induit par Δ, par conséquent Δ_r est bien définie et linéaire.

5. Par définition :

$$\operatorname{Ker}\Delta_r = \{P \in \mathbb{R}_r[X] \mid \Delta_r P = 0\} = \{P \in \mathbb{R}_r[X] \mid \Delta P = 0\}$$

D'après la question 3, $\Delta P = 0$ si, et seulement si, $P \in \mathbb{R}_0[X]$. On sait de plus que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_r[X]$, on a soit P constant et alors $\Delta P = 0 \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$, soit $\deg P > 0$ et alors $\deg \Delta P = \deg P - 1 \leqslant r-1$ donc $\Delta P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$. Ceci montre que $\operatorname{Im}\Delta_r \subset \mathbb{R}_{r-1}[X]$. Par ailleurs, avec le théorème du rang :

$$\dim \operatorname{Im}\Delta_r = \operatorname{rg}\Delta_r = \dim \mathbb{R}_r[X] - \dim \operatorname{Ker}\Delta_r = r = (r+1)-1 = \dim \mathbb{R}_{r-1}[X]$$

de sorte que par égalité des dimensions, on a $\operatorname{Im}\Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$. Le noyau de Δ_r est $\operatorname{Ker}\Delta_r = \mathbb{R}_0[X]$ et son image est $\operatorname{Im}\Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$.

6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ (il suffit de prendre $r \geqslant 1$ et $r > \deg P$). Comme $\operatorname{Im} \Delta_r = \mathbb{R}_{r-1}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_r[X]$ tel que $\Delta_r Q = P$. On a alors $\Delta Q = P$ donc $P \in \operatorname{Im} \Delta$. Tout élément de $\mathbb{R}[X]$ admet (au moins) un antécédant par Δ, donc Δ est surjective.

7. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.
Unicité. Supposons que $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$ et vérifient $\Delta(P_1) = Q$, $\Delta(P_2) = Q$, $P_1(0) = 0$ ett $P_2(0) = 0$. On a alors par linéarité :

$$\Delta(P_1 - P_2) = \Delta(P_1) - \Delta(P_2) = 0$$

donc $P_1 - P_2 \in \operatorname{Ker} \Delta$ donc d'après la question 3, $P_1 - P_2$ est constant. Comme de plus $P_1(0) - P_2(0) = 0$, on en déduit que $P_1 - P_2 = 0$. Il y a donc unicité de P (vérifiant les conditions demandées) *sous réserve d'existence.*
Existence. D'après la question précédente, Δ est surjective donc il existe $P_1 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q = \Delta(P)$. Posons $P = P_1 - c$ avec $c = P_1(0)$, alors :

$$\begin{aligned} P(0) &= P_1(0) - c = 0 \\ \Delta(P) &= \Delta_r(P) = Q \end{aligned}$$

Il existe donc $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et $\Delta(P) = Q$.
Conclusion. Pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\Delta(P) = Q$ et $P(0) = 0$.

8. Pour simplifier, on définit pour $n \in \mathbb{N}^*$ le polynôme :

$$Q_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$$

ainsi que $Q_0 = 1$ et on va démontrer que la suite (Q_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (N_n). On a bien $Q_0 = 1$ puis pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} Q_n(0) &= 0 \\ \Delta Q_n(X) &= Q_n(X+1) - Q_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X + 1 - k) - \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k) \\ &= \frac{1}{n!} \left(\prod_{k=-1}^{n-2} (X - k) - \prod_{k=0}^{n-1} (X - k) \right) \\ &= \frac{1}{n!} ((X+1) - (X - (n-1))) \prod_{k=0}^{n-2} (X - k) = \frac{n}{n!} \prod_{k=0}^{n-2} (X - k) = \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=0}^{n-2} (X - k) \\ &= Q_{n-1}(X) \end{aligned}$$

La suite (N_n) étant, d'après l'énoncé, la seule suite de polynômes vérifiant ces conditions, on en déduit que $N_n = Q_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ N_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X - k)}$$

9. D'après la question précédente, on a $\deg N_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $r \in \mathbb{N}$, la famille $(N_0, \ldots, N_r)$ est alors une famille d'éléments de $\mathbb{R}_r[X]$ échelonnée en degrés. Elle est par conséquent libre et comme elle est de cardinal $r + 1 = \dim \mathbb{R}_r[X]$, c'est une base de $\mathbb{R}_r[X]$. La famille $(N_n)_{0 \leqslant n \leqslant r}$ est une base de $\mathbb{R}_r[X]$.

10. On a $\Delta(N_n) = N_{n-1}$ (pour $n \geqslant 1$), $\Delta^2(N_n) = N_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$, etc. On a en fait :

$$\boxed{\Delta^k(N_n) = N_{n-k} \quad \text{lorsque } k \leqslant n}$$

On a ensuite $\Delta^{n+1}(N_n) = \Delta(N_0) = 0$ puis :

$$\boxed{\Delta^k(N_n) = 0 \quad \text{pour } k > n}$$

On aura également besoin des valeurs en 0 des cas polynômes. Pour $k < n$:

$$\Delta^k(N_n)(0) = N_{n-k}(0) = 0$$

car 0 est racine de N_{n-k} si $n-k > 0$. Pour $k = n$:

$$\Delta^n(N_n)(0) = N_0(0) = 1$$

Et enfin pour $k > n$, $\Delta^k(N_n) = 0$ donc :

$$\Delta^k(N_n)(0) = 0$$

11. **Méthode 1.** Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit Q un polynôme de degré r. Comme $(N_0, \dots, N_r)$ est une base de $\mathbb{R}_r[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_r[X]$, il existe $a_0, \dots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$Q = a_0 N_0 + \cdots + a_r N_r$$

Soit $k \in [\![0, r]\!]$, par linéarité de Δ^k :

$$\Delta^k Q = a_0 \Delta^k N_0 + \cdots + a_r \Delta^k N_r$$

Or $\Delta^k N_n = N_{n-k}$ si $n-k \geqslant 0$ et $\Delta^k N_n = 0$ si $k > n$. Ainsi :

$$\Delta^k Q = a_k N_0 + a_{k+1} N_1 + \cdots + a_r N_{r-k}$$

Les polynômes N_n pour $n \geqslant 1$ sont nuls en 0 donc en appliquant en 0 :

$$\Delta^k Q(0) = a_k N_0(0) + a_{k+1} N_1(0) + \cdots + a_r N_{r-k}(0) = a_k$$

On en déduit que $a_k = \Delta^k Q(0)$ et ceci est vrai quel que soit $k \in [\![0, r]\!]$. On a donc :

$$\boxed{Q = \Delta^0 Q(0) N_0 + \Delta^1 Q(0) N_1 + \cdots + \Delta^k Q(0) N_r = \sum_{k=0}^{r} \Delta^k Q(0) N_k}$$

Méthode 2. On considère l'application :

$$f : Q \in \mathbb{R}_r[X] \mapsto \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0) N_n$$

Les applications Δ^n sont linéaires donc f est linéaire et définie sur $\mathbb{R}_r[X]$. Considérons $k \in [\![0, r]\!]$, on a alors :

$$f(N_k) = \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(N_k)(0) N_n$$

On a noté à la question 10 que $\Delta^n(N_k)(0) = 0$ si $k \neq n$ et $\Delta^k(N_k)(0) = 1$. Ainsi, il ne reste dans la somme que le terme correspondant à $n = k$:

$$f(N_k) = \Delta^k(N_k)(0) N_k = N_k$$

L'application linéaire f définie sur $\mathbb{R}_r[X]$ coïncide avec l'application identité sur $(N_0, N_1, \dots, N_r)$ qui est une base de $\mathbb{R}_r[X]$. Par conséquent, elles sont égales et on a donc :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_r[X],\ \sum_{n=0}^{r} \Delta^n(Q)(0)N_n = Q$$

De plus, comme $\deg Q = r$, on a $\Delta^k Q = 0$ pour $k > r$ ce qui permet d'écrire :

$$Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \Delta^k Q(0) N_k$$

car cette somme est en fait finie.

12. Notons Q sous la forme $Q = a_0 N_0 + \cdots + a_r N_r$. L'équation $\Delta P = Q$ est une équation linéaire. Comme $N_k = \Delta N_{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}$:

$$Q = a_0 \Delta N_1 + \cdots + a_r \Delta N_{r+1} = \Delta(a_0 N_1 + \cdots + a_r N_{r+1})$$

Le polynôme $P_0 = a_0 N_1 + \cdots + a_r N_{r+1}$ **est donc une solution particulière** de l'équation $\Delta P = Q$. Par ailleurs, l'équation homogène associée est $\Delta P = 0$ dont on sait que l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}_0[X]$ (ensemble des **polynômes constants**). Par conséquent, les polynômes P pour lesquels $\Delta P = Q$ sont ceux qui s'écrivent $P = P_0 + \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ ou encore :

$$P = \lambda + \sum_{k=0}^{r} \Delta^k Q(0) N_{k+1}$$

13. On reprend les notations de la question précédente. Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n} Q(k) = \sum_{k=0}^{n} (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0)$$

Considérons $Q = X^2$. On a vu à la question 11 que :

$$Q = \sum_{n=0}^{2} \Delta^n(Q)(0)N_n = Q(0)N_0 + \Delta(Q)(0)N_1 + \Delta^2(Q)(0)N_2$$

On a ici :

$$\begin{aligned} & & Q(0) &= 0 \\ \Delta Q &= (X+1)^2 - X^2 = 2X+1 & \Delta Q(0) &= 1 \\ \Delta^2 Q &= (2(X+1)+1) - (2X+1) = 2 & \Delta^2 Q(0) &= 2 \end{aligned}$$

On a donc :

$$Q = N_1 + 2N_2$$

et le polynôme P défini par :

$$P = N_2 + 2N_3 = \frac{1}{2}X(X-1) + 2\frac{6}{X}(X-1)(X-2) = \frac{X(X-1)(2X-1)}{6}$$

est tel que $\Delta P = Q$. On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} Q(k) = P(n+1) - P(0) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

14. **Méthode 1.** On semble reconnaitre la formule du binôme de Newton. On essaie donc d'écrire Δ^n sous la forme $(f+g)^n$. On note pour cela T l'endomorphisme :

$$T : P \in \mathbb{R}[X] \longmapsto P(X+1)$$

(autrement dit, on a posé $T = \Delta + \mathrm{id}$). On a donc $\Delta = T - \mathrm{id}$ et, comme T et id commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour développer $\Delta^n = (T - \mathrm{id})^n$ pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\Delta^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k \mathrm{id}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k$$

(puisque $\mathrm{id}^{n-k} = \mathrm{id}$). Appliquons ceci en $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\Delta^n P = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} T^k(P)$$

Or, on a clairement $T^k(P)(x) = P(x+k)$. Par conséquent :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \Delta^n P(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(x+k)}$$

Méthode 2. On peut procéder par récurrence sur n (non rédigé ici).

Partie 2 Commutant de Δ

15. On a par définition $C(\Delta_r) \subset \mathscr{L}(\mathbb{R}_r[X])$. De plus, l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}_r[X]$ commute avec Δ_r, donc $C(\Delta_r)$ est non vide. Enfin, pour $g, h \in C(\Delta_r)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(\lambda g + h) \circ \Delta_r = \lambda g \circ \Delta_r + h \circ \Delta_r = \lambda \Delta_r \circ g + \Delta_r \circ h = \Delta_r \circ (\lambda g + h)$$

donc $\lambda g + h \in C(\Delta_r)$. On en déduit que $C(\Delta_r)$ est un espace vectoriel, sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_r[X])$.

16. Soient $g, h \in C(\Delta_r)$ et supposons que $g(N_r) = h(N_r)$. Soit $k \in [\![0, r]\!]$, en appliquant Δ_r^k on obtient :

$$\Delta_r^k g(N_r) = \Delta_r^k h(N_r)$$

Comme $g, h \in C(\Delta_r)$, g et Δ_r^k commutent, de même que h et Δ_r^k, donc :

$$g(\Delta_r^k N_r) = h(\Delta_r^k N_r)$$

Par définition de la famille (N_n), $\Delta^k N_r = N_{r-k}$, donc $g(N_{r-k}) = h(N_{r-k})$. Ceci étant vrai quel que soit $k \in [\![0, r]\!]$, on en déduit que g et h coïncident sur la famille $(N_0, \ldots, N_r)$ qui est une base de $\mathbb{R}_r[X]$. Comme g et h sont des endomorphismes de $\mathbb{R}_r[X]$, on a alors $g = h$.

17. Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_r[X])$. Comme $N_r \in \mathbb{R}_r[X]$, on a $g(N_r) \in \mathbb{R}_r[X]$. De plus, $(N_0, \ldots, N_r)$ est une base de $\mathbb{R}_r[X]$, donc il existe $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\boxed{g(N_r) = a_0 N_0 + \cdots + a_r N_r}$$

18. La relation obtenue à la question précédente peut également s'écrire :

$$\begin{aligned} g(N_r) &= a_r N_r + a_{r-1} N_{r-1} + \cdots + a_0 N_0 = a_r \mathrm{id}(N_r) + a_{r-1}\Delta(N_r) + \cdots + a_0 \Delta^r(N_r) \\ &= (a_r \mathrm{id} + a_{r-1}\Delta + \cdots + a_0 \Delta^r)(N_r) \end{aligned}$$

On pose alors $h = a_r \,\mathrm{id} + a_{r-1}\Delta_r + \cdots + a_0\Delta_r^r$, il est clair que $h \in C(\Delta_r)$ et comme $g, h \in C(\Delta_r)$ et $g(N_r) = h(N_r)$, donc a $g = h$. Ainsi, $g \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, \Delta_r, \ldots, \Delta_r^r)$. Réciproquement, tout élément de $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}, \Delta_r, \ldots, \Delta_r^r)$ commute avec Δ_r et ainsi :

$$\boxed{C(\Delta_r) = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, \Delta_r, \ldots, \Delta_r^r)}$$

Soient $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$ tels que $a_r \,\mathrm{id} + a_{r-1}\Delta_r + \cdots + a_0\Delta_r^r = 0$. En appliquant en N_r, il vient :

$$a_r N_r + a_{r-1}N_{r-1} + \cdots + a_0 N_0 = 0$$

Comme la famille $(N_0, \ldots, N_r)$ est libre, on en déduit $a_0 = \cdots = a_r = 0$ et par conséquent la famille $(\mathrm{id}, \Delta_r, \ldots, \Delta_r^r)$ est libre. La famille $(\mathrm{id}, \Delta_r, \ldots, \Delta_r^r)$ est libre et génératrice de $C(\Delta_r)$, c'est donc une base de $C(\Delta_r)$ et $\boxed{\dim C(\Delta_r) = r + 1.}$

Remarque. Une autre manière de voir les choses est de considérer l'application :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} C(\Delta_r) & \longrightarrow & \mathbb{R}_r[X] \\ g & \longmapsto & g(N_r) \end{array}$$

On montre alors que φ est linéaire, injective puis surjective. C'est donc un isomorphisme et $\dim C(\Delta_r) = \dim \mathbb{R}_r[X] = r + 1$.

Partie 3 Application à l'interpolation

19. On montre facilement que l'application φ est linéaire :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \varphi(\lambda P + Q) = \begin{pmatrix} (\lambda P+Q)(0) \\ \vdots \\ (\lambda P+Q)(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda P(0)+Q(0) \\ \vdots \\ \lambda P(n)+Q(n) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q(0) \\ \vdots \\ Q(n) \end{pmatrix} = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$$

Considérons $P \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, on a alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P(0) = \cdots = P(n) = 0$. Le polynôme P admet donc $n+1$ racines distinctes (les éléments de $[\![0, n]\!]$) et comme $\deg P \leqslant n$, on en déduit que $P = 0$. Comme $0 \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, on en déduit que $\mathrm{Ker}\,\varphi = \{0\}$ et φ est injective. De plus, φ est une application linéaire entre deux espaces de dimension finie et $\dim \mathbb{R}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{R}^{n+1}$, par conséquent φ est bijective. L'application φ est donc un isomorphisme. Par définition, ceci signifie que tout élément de l'espace d'arrivée admet un unique antécédent par φ, c'est à dire :

$$\forall \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1},\ \exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Appliquons ceci avec $\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0) \\ \vdots \\ f(n) \end{pmatrix}$:

$$\boxed{\exists! P \in \mathbb{R}_n[X],\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ P(k) = f(k)}$$

20. Considérons $f : x \mapsto b^x$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, avec la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b^i = (b-1)^n}$$

La suite (a_n) est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $b - 1$.

21. Notons $r = \deg P$, d'après la question **???** :

$$P = \sum_{k=0}^{r} \Delta^k(P)(0) N_k = \sum_{k=0}^{n} \Delta^k(P)(0) N_k$$

puisque $r \leqslant n$ et $\Delta^k(P) = 0$ si $k > r$. La famille $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc par unicité de la décomposition :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = \Delta^k(P)(0)}$$

En utilisant la définition des a_k ainsi que la question 14 :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = \Delta^k(P)(0) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)$$

Plus explicitement, ces égalités fournissent le système :

$$\left\{\begin{array}{c} f(0) = P(0) \\ -f(0) + f(1) = -P(0) + P(1) \\ f(0) - 2f(1) + f(2) = P(0) - 2P(1) + P(2) \\ \vdots \\ (-1)^n f(0) + \cdots + f(n) = (-1)^n P(0) + \cdots + P(n) \end{array}\right.$$

On peut alors démontrer que $f(k) = P(k)$ quel que soit $k \in [\![0, n]\!]$. On propose pour cela deux méthodes.
Méthode 1 : par récurrence. La première égalité donne $f(0) = P(0)$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et supposons que $f(i) = P(i)$ pour tout i tel que $0 \leqslant i < k$. L'écriture de a_{k+1} donne :

$$a_k = f(k) + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(i) = P(k) + \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(i)$$

et comme les deux sommes sont égales, on en déduit que $f(k) = P(k)$. Ainsi, par récurrence, on a $f(k) = P(k)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. **Méthode 2 :** en utilisant le système. On a tout d'abord :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} (f(i) - P(i)) = 0$$

ce que l'on peut écrire matriciellement :

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

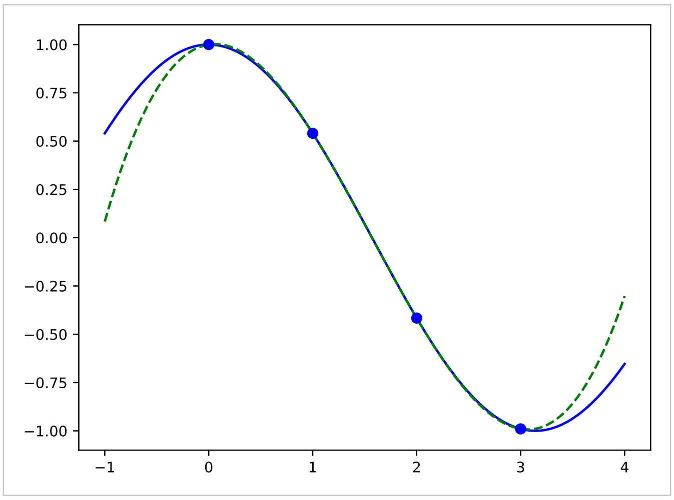
en posant $x_0 = f(0) - P(0), \dots, x_n = f(n) - P(n)$ et A la matrice de taille $(n+1, n+1)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & (0) \\ -1 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ (-1)^k & (-1)^{k-1}\binom{k}{1} & \cdots & (-1)\binom{k}{k-1} & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ (-1)^n & (-1)^{n-1}\binom{n}{1} & \cdots & \cdots & \cdots & (-1)\binom{n}{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est triangulaire et de déterminant 1 donc inversible. Par conséquent, le système admet une unique solution or c'est un système homogène donc on a $x_0 = \cdots = x_n = 0$ c'est à dire $f(k) = P(k)$ quel que soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Le polynôme P réalise donc une interpolation de f aux points d'abscisses $0, 1, \dots, n$.

22. Par applications de ce qui précède, il suffit de définir la fonction f, les termes $a_0, \dots, a_3$, les polynômes $N_0, \dots, N_3$ puis le polynôme P. On peut effectuer tout ceci explicitement :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(x):
    return np.cos(x)

def N0(x):
    return 1

def N1(x):
    return x

def N2(x):
    return x*(x-1)/2

def N3(x):
    return x*(x-1)*(x-2)/6

a0 = f(0)
a1 = -f(0)+f(1)
a2 = f(0)-2*f(1)+f(2)
a3 = -f(0)+3*f(1)-3*f(2)+f(3)

def P(x):
    return a0*N0(x)+a1*N1(x)+a2*N2(x)+a3*N3(x)

x = np.linspace(-1,4,100)
plt.plot(x,f(x),'b-')
plt.plot(x,P(x),'g--')
plt.plot([0,1,2,3],[f(0),f(1),f(2),f(3)],'bo')
```



Il est plus intéressant de proposer des fonctions générales permettant de calculer les coefficients a_k, les polynômes N_k ainsi que le polynôme P. Pour simplifier les écritures, on utilise quelques constructions spécifiques de PYTHON :

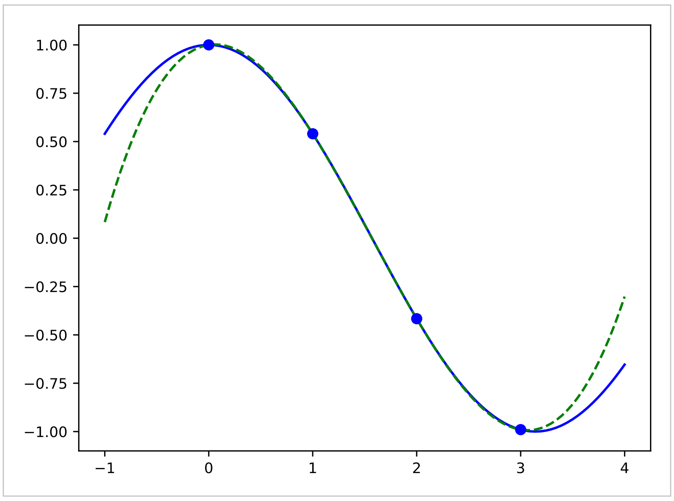
— la fonction **sum** s'applique à une liste et renvoie la somme de ses éléments ;

— l'écriture `[u(k) for k in range(a,b)]` construit la liste `(u(a),u(a+1),...,u(b-1)]` ;

— les fonctions **binom** et **factorial** du module **scipy.special** permettent de calculer respectivement es coefficients binomiaux et la factorielle.

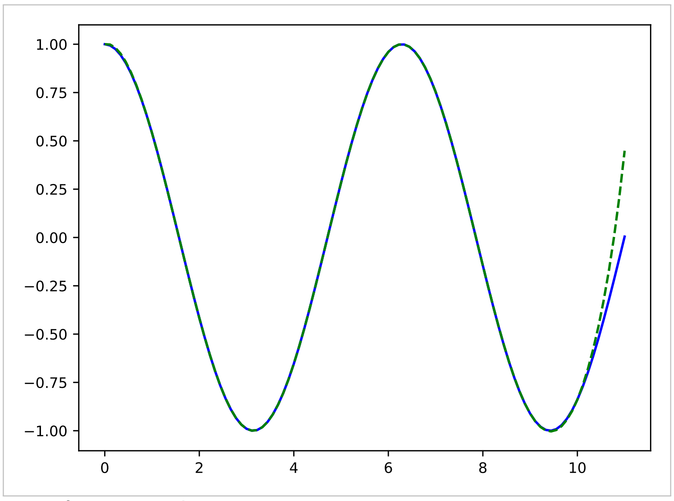
L'utilisation de la fonction **sum** permet de calculer la somme des éléments d'une liste sans avoir à rédiger une boucle. Dans le même esprit, on définit une fonction **product** pour calculer des produits.

```
from scipy.special import binom, factorial

def a(k,f):
    return sum([(-1)**(k-i)*binom(k,i)*f(i) for i in range(0,k+1)])

def product(L):
    p = 1
    for x in L:
        p = p*x
    return p

def N(k,x):
    return product([x-i for i in range(0,k)])/factorial(k)

def interpolation(f,n,x):
    return sum([a(k,f)*N(k,x) for k in range(0,n+1)])

plt.plot(x,f(x),'b-')
plt.plot(x,interpolation(f,3,x),'g--')
plt.plot([0,1,2,3],[f(0),f(1),f(2),f(3)],'bo')
```



On peut maintenant sans problème réaliser l'interpolations de f aux abscisses $0, 1, \ldots, 10$:

```
x = np.linspace(0,11,100)
plt.plot(x,f(x),'b-')
plt.plot(x,interpolation(f,10,x),'g--')
```



Partie 4 Polynômes à valeurs entières

23. On a bien entendu $N_0(k) = 1$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$. On considère pour la suite un entier $n \geqslant 1$. Le polynôme N_n a pour racines $0, \dots, n-1$ donc :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ N_n(k) = 0$$

Pour un entier $k \geqslant n$, on a :

$$N_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(k-j) = \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!} = \frac{k!}{n!(n-k)!} = \binom{k}{n}$$

On considère maintenant un entier $k < 0$ et on pose $p = -k > 0$, on a :

$$N_n(k) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(-p-j) = \frac{(-1)^n}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(p+j) = (-1)^n\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} = (-1)^n\frac{p+n-1!}{n!p-1!} = (-1)^n\binom{p+n-1}{n}$$

24. Comme les coefficients binomiaux sont des entiers, d'après la question précédente $N_n(k) \in \mathbb{Z}$ quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ ce qui signifie que $N_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

25. On suppose que $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$. On a alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ \Delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$$

donc $\Delta(P)$ est à valeurs entières sur les entiers.

26. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose d'abord que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. D'après ce qui précède, il en est de même de $\Delta(P)$ et, par une récurrence immédiate, il en est de même de $\Delta^j(P)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'après la question 11, les coefficients de P dans la base $(N_0, \dots, N_n)$ sont les $(\Delta^j(P)(0))_{0 \leqslant j \leqslant n}$ et ce sont donc des nombres entiers. Réciproquement, on suppose que P s'écrit :

$$P = \sum_{j=0}^{n} a_j N_j$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors pour $k \in \mathbb{Z}$:

$$P(k) = \sum_{j=0}^{n} a_j N_j(k)$$

D'après la question 23, $N_0(k), \dots, N_n(k)$ sont des entiers donc $P(k)$ est un entier comme somme de produits de nombres entiers.

Conclusion. Un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières si, et seulement si, ses coordonnées dans la base $(N_0, \dots, N_n)$ sont des entiers.