DM 2 pour le Vendredi 4 octobre 2024 — PC*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

On propose dans ce problème une étude des intégrales de Wallis avec une application à la formule de Stirling.

Partie 1 Presque la formule de Stirling

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{n!}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}$.

1. En utilisant des développements limités, démontrer qu'il existe un réel α, que l'on explicitera, tel que

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^2}$$

2. Démontrer que la série de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ converge.

3. Démontrer qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} K$.

4. Démontrer que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} K n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Partie 2 Formule explicite des intégrales de Wallis

5. Donner la valeur de W_0 et de W_1.

6. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour $n \geqslant 1$, on a $W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} W_{n-1}$.

7. Démontrer que pour $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \dfrac{\pi}{2}$.

Partie 3 Équivalent des intégrales de Wallis

8. Démontrer que la suite de terme général $nW_{n-1}W_n$ est constante et en déduire qu'il existe un réel $a > 0$, que l'on explicitera, tel que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{an}$$

9. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n > 0$.

10. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$.

11. Démontrer que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

12. Démontrer qu'il existe un réel $b > 0$, que l'on explicitera, tel que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{bn}}$.

Partie 4 Formule de Stirling

13. En utilisant les questions 4 et 7, déterminer un équivalent de W_{2p} faisant intervenir K.

14. En utilisant la question 12, déterminer la valeur de K.

Correction DM 2 – CCP L2 2009 Épreuve 2

Partie 1 Presque la formule de Stirling

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^{-(n+1)}\sqrt{2\pi(n+1)}} \cdot \frac{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}}{n!}\right) \\
&= \ln\left(\frac{(n+1)n^n\mathrm{e}^{n+1}\sqrt{2\pi n}}{(n+1)^{n+1}\mathrm{e}^n\sqrt{2\pi(n+1)}}\right) \\
&= \ln\left(\mathrm{e}^1\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\ln\frac{n+1}{n}\right) \\
&= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Attention, si on utilise le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\ln(1+x)$, on aura un $\mathrm{o}(1/n)$ qui sera multiplié par n et donnera donc un $\mathrm{o}(1/n)$. On n'obtiendra donc pas au final la précision en $1/n^2$ souhaitée. On utilise le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1+x)$:

$$\begin{aligned}
\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) &= 1 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{3n^2} + \frac{1}{4n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{12n^2} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$$

Le réel $\alpha = -1/12$ convient.

2. La série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge car $2 > 1$. Par comparaison avec une série à termes de signe constant, la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge.

3. La série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge donc d'après le cours, la suite $(\ln(u_n))$ converge. On note ℓ sa limite, par composition des limites on a :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^\ell > 0$$

Le réel $K = \mathrm{e}^\ell > 0$ convient.

4. D'après ce qui précède :

$$\frac{n!}{n^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} K > 0$$

On en déduit que :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} Kn^n\mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}$$

Partie 2 Formule explicite des intégrales de Wallis

5. Le calcul est immédiat : $\boxed{W_0 = \int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}t = \pi/2}$ et $\boxed{W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^{\pi/2} = 1}$.

6. On considère $n \geqslant 1$. On part de W_{n+1} :

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$$

On considère les fonctions :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sin^n(t) & v'(t) &= \sin(t) \\ u'(t) &= n\cos(t)\sin^{n-1}(t) & v(t) &= -\cos(t) \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 ; on réalise une intégration par parties :

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \underbrace{\left[-\cos(t)\sin^n(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + n\int_0^{\pi/2} \cos^2(t)\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\pi/2} (1-\sin^2(t))\sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(t)\,\mathrm{d}t - n\int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= nW_{n-1} - nW_{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ donc $\boxed{W_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}W_{n-1}}$.

7. On considère pour $p \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence :

$$\mathscr{H}(p) : W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Pour $p = 0$:

$$\frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0$$

donc $\mathscr{H}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{H}(p)$ vraie. Avec la question précédente :

$$\begin{aligned} W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} &= \frac{2p+1}{2p+2} \cdot \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+1)(2p+2)}{(2p+2)^2} \cdot \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2^2(p+1)^2} \cdot \frac{(2p+2)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p+2)!}{(2^{p+1}(p+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie. Par récurrence, on a démontré :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ W_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Partie 3 Équivalent des intégrales de Wallis

8. Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = nW_{n-1}W_n$. On a alors avec la question 6 :

$$u_{n+1} - u_n = (n+1)W_n W_{n+1} - nW_{n-1}W_n = W_n((n+1)W_{n+1} - nW_{n-1}) = 0$$

La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est par conséquent constante. On a donc :

$$\forall n \geqslant 1,\ W_{n-1}W_n = \frac{u_n}{n} = \frac{u_1}{n} = \frac{W_0 W_1}{n} = \frac{\pi}{2n}$$

Le réel $a = 2$ convient.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a déjà $W_n \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale puisque la fonction $\sin^n$ est positive sur $[0, \pi/2]$. Supposons $W_n = 0$; la fonction $\sin^n$ étant continue et positive sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, elle serait identiquement nulle sur cet intervalle et ce n'est pas le cas. Par conséquent, $W_n > 0$.

10. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, \pi/2]$. On a :

$$\sin t \leqslant 1$$

En multipliant par $\sin^n t$ qui est positif, on a :

$$\sin^{n+1} t \leqslant \sin^n t$$

donc par croissance de l'intégrale :

$$W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t = W_n$$

On en déduit que la suite (W_n) est décroissante. On a donc pour tout $n \geqslant 1$: $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$.

11. On reprend l'inégalité $W_{n+1} \leqslant W_n \leqslant W_{n-1}$. On divise par $W_{n-1} > 0$:

$$\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} \leqslant \frac{W_n}{W_{n-1}} \leqslant 1$$

D'après la question 6 :

$$\frac{W_{n+1}}{W_{n-1}} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Par théorème d'encadrement, on en déduit :

$$\frac{W_n}{W_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et ceci prouve que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}$.

12. Avec la question 8 et la question précédente :

$$W_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} W_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2n}$$

On peut élever un équivalent (entre termes positifs) à la puissance $1/2$. Sachant que $W_n > 0$ on en déduit :

$$W_n = \left(W_n^2\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Par conséquent, $b = 2$ convient.

Partie 4 Formule de Stirling

13. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a vu à la question 7 que :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} p!^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Avec la question 4 :

$$p! \underset{p \to +\infty}{\sim} K p^p \mathrm{e}^{-p} \sqrt{2\pi p}$$
$$p!^2 \underset{p \to +\infty}{\sim} K^2 p^{2p} \mathrm{e}^{-2p} (2\pi p)$$

et on a également :

$$(2p)! \underset{p \to +\infty}{\sim} K (2p)^{2p} \mathrm{e}^{-2p} \sqrt{2\pi 2p}$$

On a donc :

$$\boxed{W_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{K (2p)^{2p} \mathrm{e}^{-2p} \sqrt{2\pi 2p}}{2^{2p} K^2 p^{2p} \mathrm{e}^{-2p} (2\pi p)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2K\sqrt{p}}}$$

14. Avec la question 12 :

$$W_{2p} \underset{p \to +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4p}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

On en déduit que $\boxed{K = 1}$ et on a donc :

$$n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\, n^n \mathrm{e}^{-n}$$