TP 18 : Représentations graphiques

Exercice 1 *Comparer une fonction et ses* DL.

(a) Représenter sur le même graphique la fonction exp (en trait plein) ainsi que les fonctions $x \mapsto 1+x$ et $x \mapsto 1+x+x^2/2$ (en pointillés) sur l'intervalle $[-2,2]$.

(b) De même, représenter sur le même graphique la fonction cos ainsi que son $\mathrm{DL}_2(0)$ et son $\mathrm{DL}_4(0)$ sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$.

Exercice 2 *Visualiser le rôle d'un paramètre.* On considère l'équation différentielle du second ordre sous forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_c}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t}+u_c=0$$

avec $w_0 = 10^4\ \mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On considère une solution :

$$u_c(t) = A\cos(\omega_a t)\exp(-\xi\omega_0 t)$$

avec $A = 1$ V et $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ (régime peudopériodique).

(a) Représenter la fonction u_c pour $\xi = 0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ sur $[0, 4T]$ avec $T = 2\pi/\omega_0$. Préciser les axes (et les unités).

(b) Modifier les instructions précédentes pour que la première courbe ($\xi = 0.1$) soit tracée en bleu, la dernière ($\xi = 0.9$) en rouge et les autres en vert.

Exercice 3 *Représentation graphique à partir d'un fichier.* Le fichier **`mesures.txt`** qui vous a été envoyé contient des résultats de mesures effectuées à différents instants. Chaque ligne du fichier contient deux nombres séparés par un espace : la valeur de t ainsi que la valeur M mesurée à cet instant. Représenter graphiquement M en fonction de t en allant lire les informations dans le fichier.

Exercice 4 *Trajectoire d'un point.* On considère un point M de coordonnées $(x(t), y(t))$ qui se déplace au cours du temps. On prend :

$$x(t) = 5(1-t^2)\mathrm{e}^{-t^2}$$
$$y(t) = 5t\mathrm{e}^{-t^2}$$

Représenter la trajectoire décrite par le point $M(t)$ lorsque t varie de -5 à 5.

Exercice 5 *Conjecturer un résultat.* On considère les suites (S_n), (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$$
$$u_n = S_{2n}$$
$$v_n = S_{2n+1}$$

(a) Définir ces trois suites et représenter sur le même dessin les premiers termes des suites (u_n) et (v_n).

(b) Quelles propriétés observe-t-on sur les suites (u_n) et (v_n) ? Les démontrer.

Exercice 6 *Comparer un modèle et des mesures.* On considère la réaction de décomposition des ions peroxodisulfate :

$$S_2O_8^{2-} + H_2O = 2SO_4^{2-} + \frac{1}{2}O_2 + 2H^+$$

On note A la concentration en $S_2O_8^{2-}$ et B la concentration en SO_4^{2-}. L'évolution de ces concentrations est modélisée par les fonctions :

$$A : t \longmapsto C_0 \mathrm{e}^{-kt}$$
$$B : t \longmapsto 2(C_0 - A(t))$$

avec $k = 5.0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{min}^{-1}$ et $C_0 = 10^{-2}\ \mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$. On réalise par ailleurs les mesures suivantes :

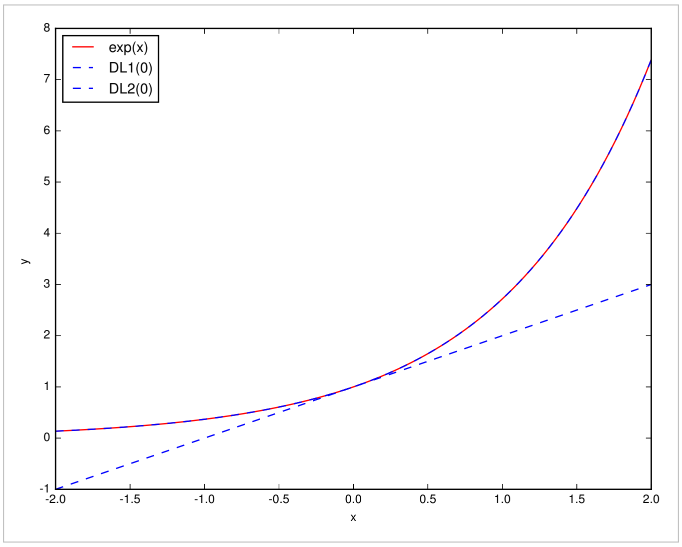
t (min)	0	50	100	150	200	250
A ($\mathrm{mol} \cdot \mathrm{L}^{-1}$)	10^{-2}	$7.8 \cdot 10^{-3}$	$6.05 \cdot 10^{-3}$	$4.72 \cdot 10^{-3}$	$3.68 \cdot 10^{-3}$	$2.86 \cdot 10^{-3}$

Représenter sur le même dessin les courbes théoriques pour A et B ainsi que les valeurs expérimentales.

Corrections

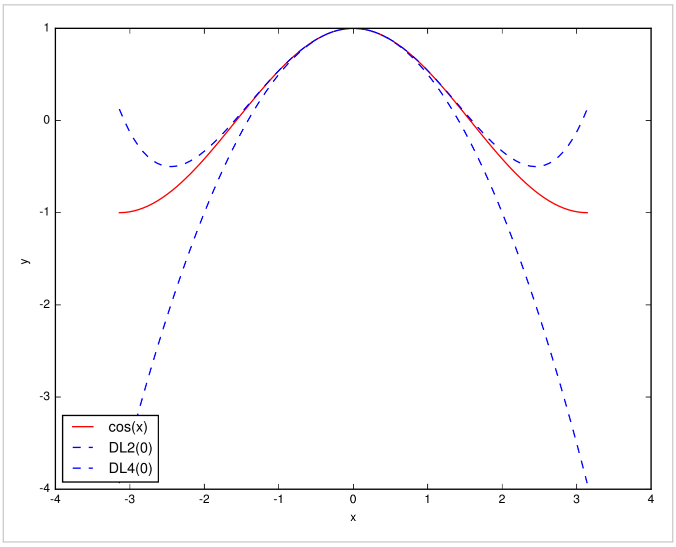
Ex 1.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

Lx = np.linspace(-2,2,100)
Ly1 = [np.exp(x) for x in Lx]
Ly2 = [1+x for x in Lx]
Ly3 = [1+x+(x**2)/2 for x in Lx]

plt.plot(Lx,Ly1,'r-')
plt.plot(Lx,Ly1,'b--')
plt.plot(Lx,Ly2,'b--')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend(["exp(x)","DL1(0)","DL2(0)"],loc="upper left")
```



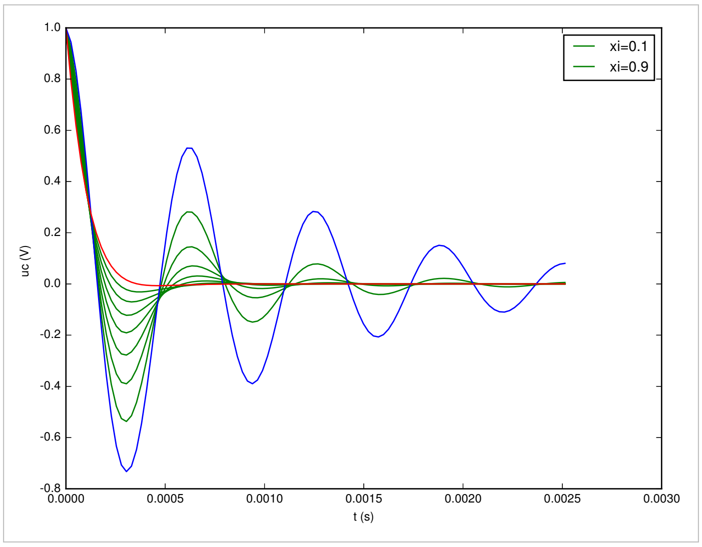
On peut également utiliser les fonctions du module NUMPY pour éviter de construire les différentes listes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(-np.pi,np.pi,100)

plt.plot(x,np.cos(x),'r-')
plt.plot(x,1-(x**2)/2,'b--')
plt.plot(x,1-(x**2)/2+(x**4)/24,'b--')
plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.legend(["cos(x)","DL2(0)","DL4(0)"],loc="lower left")
```



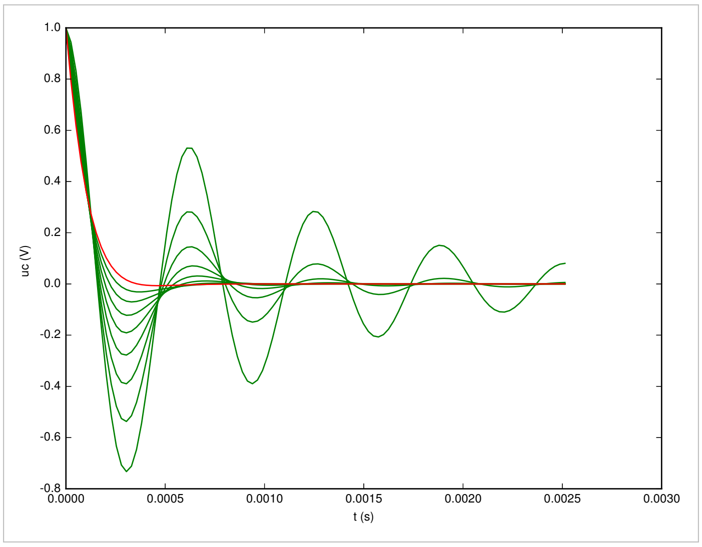
Ex 2.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w_0 = 1e4
A = 1
T = 2*np.pi/w_0

def u(t):
    return A*np.cos(w_a*t)*np.exp(-xi*w_0*t)

Lt = np.linspace(0,4*T,100)

# Les courbes 0.2<=xi<=0.8
for xi in [0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8]:
    w_a = w_0*np.sqrt(1-xi**2)
    plt.plot(Lt,[u(t) for t in Lt],'g-')

# La première courbe (xi=0.1)
xi = 0.1
w_a = w_0*np.sqrt(1-xi**2)
plt.plot(Lt,[u(t) for t in Lt],'b-')

# La dernière courbe (xi=0.9)
xi = 0.9
w_a = w_0*np.sqrt(1-xi**2)
plt.plot(Lt,[u(t) for t in Lt],'r-')

plt.legend(["xi=0.1","xi=0.9"])

plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("uc (V)")
```



Une autre possibilité :

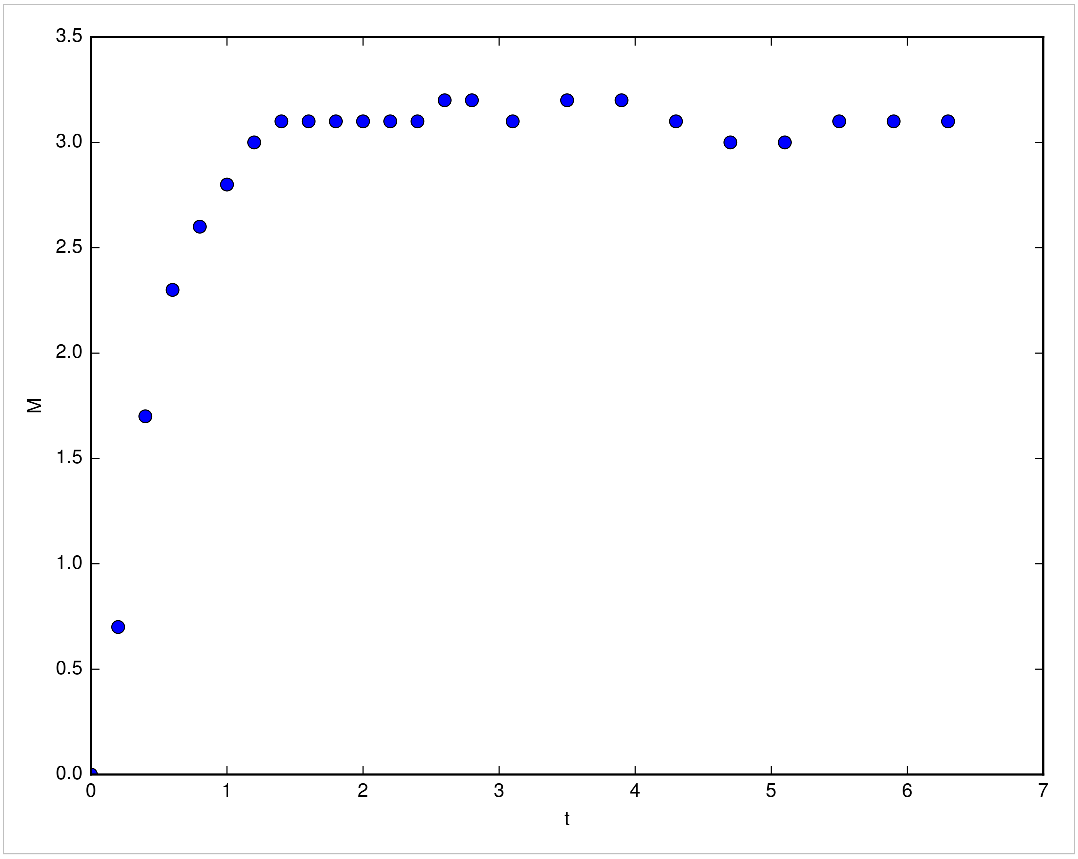
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

w_0 = 1e4
A = 1
T = 2*np.pi/w_0

def u(t):
    return A*np.cos(w_a*t)*np.exp(-xi*w_0*t)

Lt = np.linspace(0,4*T,100)

for i in range(1,10):
    xi = i/10
    w_a = w_0*np.sqrt(1-xi**2)
    if i==0:
        style = 'b-'
    elif i==9:
        style = 'r-'
    else:
        style = 'g-'
    plt.plot(Lt,[u(t) for t in Lt],style)

plt.xlabel("t (s)")
plt.ylabel("uc (V)")
```



Ex 3.

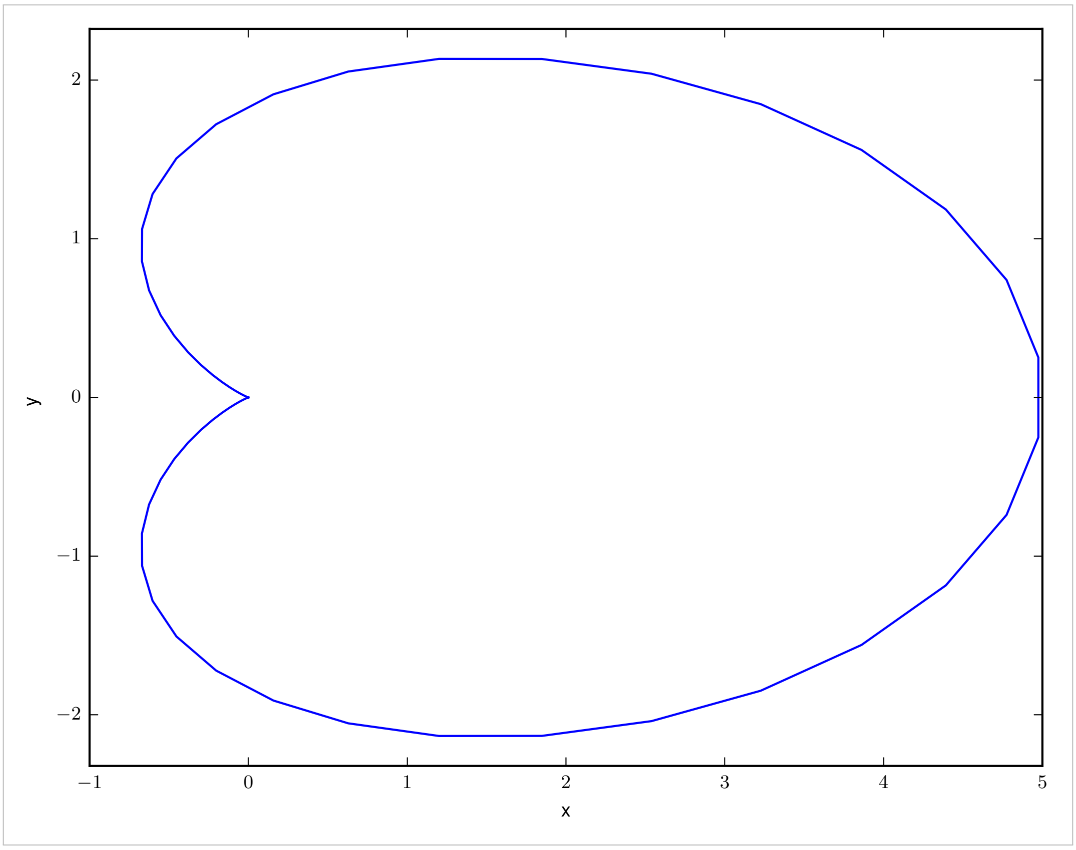
```
nomfichier = 'mesures.txt'
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fichier = open(nomfichier,'r')
Lt = []
LM = []

s = fichier.readline()
while s!="":
    L = s.split()
    Lt.append(float(L[0]))
    LM.append(float(L[1]))
    s = fichier.readline()

fichier.close()

plt.plot(Lt,LM,'bo')
plt.xlabel("t")
plt.ylabel("M")
```



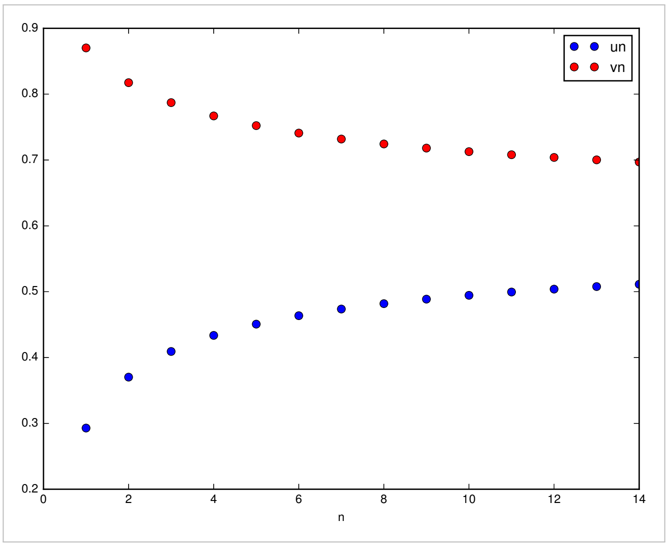
Ex 4.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

Lt = np.linspace(-5,5,100)
Lx = [5*(1-t**2)*np.exp(-t**2) for t in Lt]
Ly = [5*t*np.exp(-t**2) for t in Lt]

plt.plot(Lx,Ly,'b-')

plt.xlabel("x")
plt.ylabel("y")
plt.axis("equal")
```



Ex 5.

```
import matplotlib.pyplot as plt

def S(n):
    s = 0
    for k in range(1,n+1):
        s = s+(-1)**(k+1)/(k**0.5)
    return s

def u(n):
    return S(2*n)

def v(n):
    return S(2*n+1)

Ln = list(range(1,15))
Lu = [u(n) for n in Ln]
Lv = [v(n) for n in Ln]

plt.plot(range(1,15),Lu,'bo')
plt.plot(range(1,15),Lv,'ro')

plt.legend(["un","vn"])
plt.xlabel("n")
```

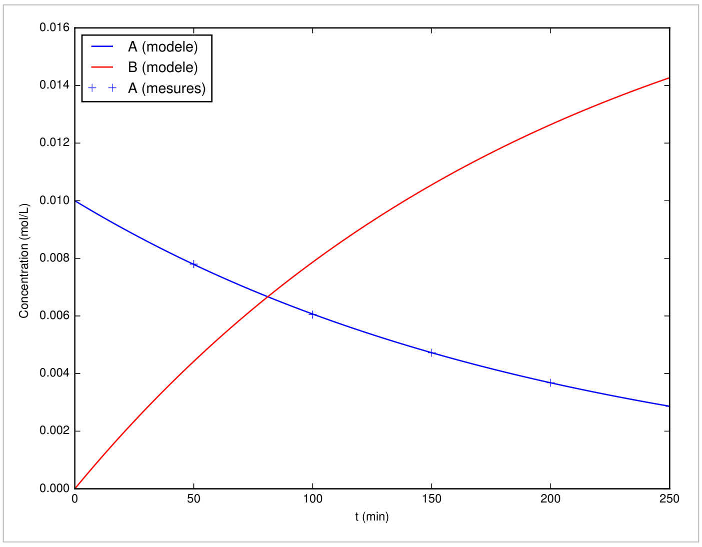


Les propriétés visibles (à démontrer) :

- La suite (u_n) est croissante ;
- La suite (v_n) est décroissante ;
- Pour tout $n \geqslant 1$: $u_n \leqslant v_n$.

Ex 6.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

t_mes = [0,50,100,150,200,250]
A_mes = [1e-2,7.8e-3,6.05e-3,4.72e-3,3.68e-3,2.86e-3]
C_0 = 1e-2
k = 5e-3

Lt = np.linspace(0,250,100)
LA = [C_0*np.exp(-k*t) for t in Lt]
LB = [2*C_0*(1-np.exp(-k*t)) for t in Lt]

plt.plot(Lt,LA,'b-')
plt.plot(Lt,LB,'r-')
plt.plot(t_mes,A_mes,'b+')

plt.legend(["A (modele)","B (modele)","A (mesures)"],loc="upper left")
plt.xlabel("t (min)")
plt.ylabel("Concentration (mol/L)")
```



A (modele)
B (modele)
A (mesures)
Concentration (mol/L)
t (min)
0.000
0.002
0.004
0.006
0.008
0.010
0.012
0.014
0.016
0
50
100
150
200
250