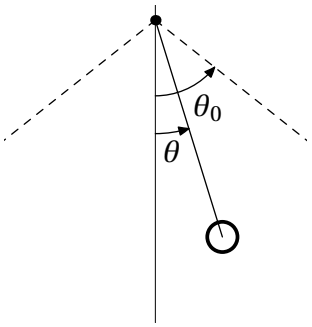
TP 19 : Calcul approché d'intégrales

Exercice 1 *Calcul de la période d'oscillation d'un pendule.*
On considère un pendule simple pouvant osciller dans le plan vertical constitué d'une masse m suspendue par un fil de longueur ℓ. La position du pendule par rapport à la verticale est repérée par un angle θ. Lorsque les oscillations sont de faible amplitude, la période T des oscillations est donnée en première approximation par la relation :



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

Dans le cas général, la période des oscillations est :

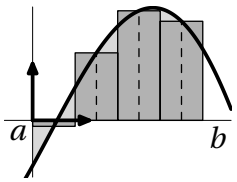
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \quad \text{avec} \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

où θ_0 est l'amplitude des oscillations.

(a) Programmer la fonction **`trapezes(f,a,b,n)`** permettant d'obtenir une valeur approchée de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par la méthode des trapèzes. Tester cette fonctions sur des exemples simples.

(b) En utilisant la méthode des trapèzes, calculer T pour $\ell = 1$ m et $\theta_0 = 50°$. Contrôler l'ordre de grandeur du résultat.

Exercice 2 *Programmer et tester une méthode d'approximation d'intégrales.*
On considère dans cet exercice la *méthode des rectangles avec point milieu*. Cette approximation est construite à partir d'une subdivision régulière $a_0, \ldots, a_n$ de l'intervalle $[a,b]$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est alors approchée par la somme des aires des rectangles dont la largeur est la longueur de l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$ et la hauteur est la valeur de f au milieu de cet intervalle.



(a) Écrire l'approximation obtenue comme une somme, à la manière de ce qui a été fait pour la méthode des rectangles.

(b) Programmer une fonction **`rectangles_milieu(f,a,b,n)`** qui réalise cette approximation où n est le nombre d'intervalles de la subdivision.

(c) Proposer une méthode permettant de comparer le précision de cette approximation avec celle obtenue pour la méthode des rectangles et des trapèzes.

Exercice 3 *Contrôler la précision du résultat.* Dans cet exercice, on considère une fonction f continue sur $[a,b]$ et on souhaite mettre en place une méthode permettant d'obtenir des approximations de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à une précision donnée. On supposera que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit :

$$R_n = h\sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih) \quad \text{et} \quad R'_n = h\sum_{i=1}^{n} f(a+ih) \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

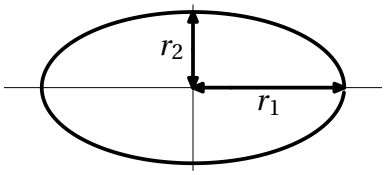
R_n et R'_n sont les approximations de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenues par application de la méthode des rectangles respectivement à gauche et à droite.

(a) Faire une représentation graphique d'une fonction f strictement croissante. Constater sur le dessin les relations entre $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, R_n et R'_n.
(b) Simplifier $R'_n - R_n$. Comment choisir l'entier n de sorte que R_n et R'_n soient des valeurs approchées de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à ε près ?
(c) Écrire une fonction **`integrale_fcroissante(f,a,b,epsilon)`** qui calcule et renvoie une valeur approchée à **`epsilon`** près de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ en supposant f continue sur $[a,b]$ et strictement croissante. Tester cette fonction sur des exemples pertinents.

Exercice 4 *Longueur de l'orbite de Pluton.* La sonde spatiale New Horizons, lancée en janvier 2006 par la NASA, est la première sonde à explorer le système plutonien ; elle le traverse le 14 juillet 2015 à une distance minimale de 11 095 km de Pluton, après un voyage de 6,4 milliards de kilomètres. On se propose dans cette question de calculer la longueur de l'orbite de Pluton.

Photographie en couleurs quasi-réelles de Pluton prise par la sonde New Horizons le 14 juillet 2015. NASA / Johns Hopkins University Applied Physics Laboratory / Southwest Research Institute

L'orbite décrite par Pluton est une ellipse dont les axes ont pour longueurs respectives $r_1 = 39.482$ au et $r_2 = 38.228$ au (où au désigne l'unité de longueur appelée *unité astronomique*).



On peut démontrer que la longueur de cette orbite est :

$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{r_1^2 \sin^2 t + r_2^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

Utiliser la fonction **`trapezes`** pour déterminer la longueur de l'orbite de Pluton. Proposer une méthode permettant de vérifier l'ordre de grandeur du résultat obtenu.

Corrections

Ex 1.

```
from math import *

def trapezes(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    s = (f(a)+f(b))/2
    for i in range(1,n):
        s = s+f(a+i*h)
    return h*s

theta0 = 50*pi/180
k = sin(theta0/2)
g = 9.81
l = 1
print(4*sqrt(l/g)*trapezes(lambda u:1/sqrt(1-k**2*sin(u)**2),0,pi/2,100))
```

```
2.105934619283644
```

Pour vérifier l'ordre de grandeur du résultat, on peut le comparer avec $2\pi\sqrt{\ell/g}$ (pédiode dans le cas des oscillations de faible amplitude) :

```
print(2*pi*sqrt(l/g))
```

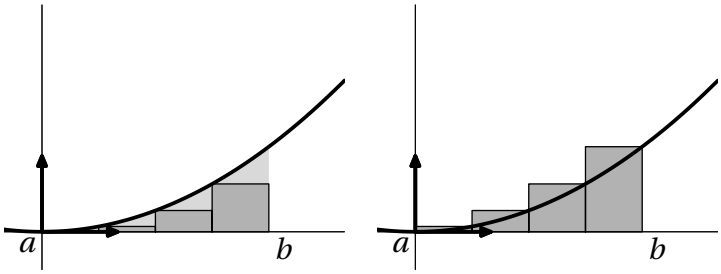
```
2.0060666807106475
```

```
def rectangles_milieu(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    s = 0
    for k in range(0,n):
        s = s+f(a+(k+0.5)*h)
    return h*s
for n in [10,100,1000,10000,100000,1000000]:
    print(rectangles_milieu(lambda x:x**2,0,1,n))
```

```
0.3325
0.333325
0.33333324999999997
0.33333333249999875
0.3333333333249929
0.3333333333332494
```

On remarque que l'on gagne approximativement 2 chiffres significatifs en passant de $n = 10^k$ à 10^{k+1}.

Ex 3. Représentation graphique d'une fonction croissante ainsi que les rectangles à gauche et à droite :



Rectangles à gauche Rectangles à droite

On a donc $R_n \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R'_n$. Ensuite :

$$R'_n - R_n = h\left(\sum_{i=1}^{n} f(a+ih) - \sum_{i=0}^{n-1} f(a+ih)\right) = h(f(b)-f(a)) = \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n}$$

Si on a :

$$\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} \leqslant \varepsilon$$

alors R_n et R'_n sont des valeurs approchées de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ à ε près. On obtient une valeur de n qui convient en choisissant n entier de sorte que :

$$n \geqslant \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$$

On en déduit l'écriture de la fonction **integrale_fcroissante** :

```
def integrale_fcroissante(f,a,b,epsilon):
    """
    a et b de type float, a<b
    f fonction continue et strictement croissante sur [a,b]
    epsilon>0
    Résultat : une valeur approchée à epsilon près
    de intégrale de f sur [a,b]
    """
    n = int((b-a)*(f(b)-f(a))/epsilon)+1 # pour avoir un entier
    return trapezes(f,a,b,n)
```

(on utilise la méthode des trapèzes pour le calcul final, car le résultat renvoyé est ainsi égal à la moyenne de R_n et R'_n et sera donc une approximation plus précise que chacun d'eux). Sur l'exemple de $\int_0^1 \exp(x)\,\mathrm{d}x$ avec une précision 10^{-5}, la valeur exacte de l'intégrale étant $e-1$:

```
print(integrale_fcroissante(exp,0,1,1e-5))
print(exp(1)-1)
```

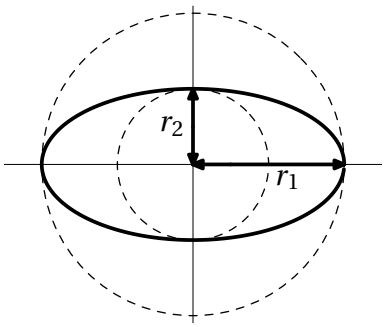
```
1.7182818284638761
1.718281828459045
```

Ex 4. Calculons une valeur approchée de l'intégrale avec la fonction **trapezes** :

```
from math import *

r1 = 39.482
r2 = 38.228

def u(t):
    return (r1**2*sin(t)**2+r2**2*cos(t)**2)**0.5

print(trapezes(u,0,2*pi,1000))
```

```
244.14905844825796
```

Pour vérifier l'ordre de grandeur, regardons si le résultat obtenu est compris entre $2\pi r_1$ et $2\pi r_2$, périmètres des cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 :




```
print(2*pi*r1, 2*pi*r2)
```

```
248.0727222980644 240.19360792286122
```

C'est bien le cas.