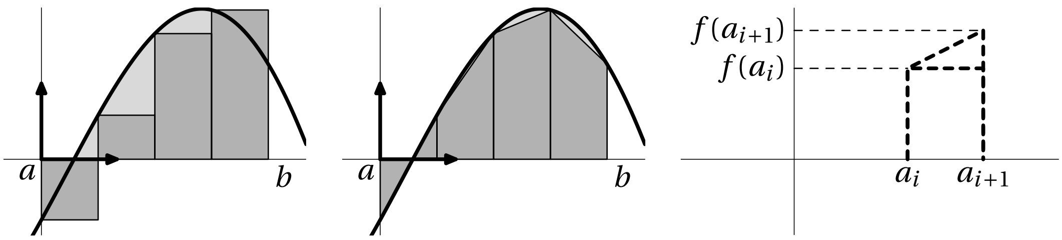
19

Approximation d'intégrales

◇ On considère une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$. On veut déterminer une valeur approchée de

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

On utilise pour cela un entier $n > 0$ et on divise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même taille et on approche l'aire sous la courbe au moyen de rectangles ou de trapèzes.



◇ Il faut **savoir retrouver à partir d'un dessin** les résultats suivants :

- La taille des intervalles est $h = \dfrac{b-a}{n}$.
- Les abscisses successives sont $a_0, a_1, \ldots, a_n$ avec $a_i = a + ih$.
- L'aire du rectangle délimité par les abscisses a_i, a_{i+1} et de hauteur $f(a_i)$ est :

$$(a_{i+1} - a_i) \times f(a_i) = hf(a + ih)$$

- L'aire du trapèze délimité par les abscisses a_i, a_{i+1} et dont la hauteur va de $f(a_i)$ à $f(a_{i+1})$ est :

$$(a_{i+1} - a_i) \times \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2} = h\frac{f(a+ih) + f(a+(i+1)h)}{2}$$

- La somme des aires des rectangles est $R_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} hf(a+ih)$.
- La somme $R'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} hf(a+ih)$ correspond aux rectangles « à droite. »
- La somme des aires des trapèzes est $T_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \dfrac{h}{2}\big(f(a+ih) + f(a+(i+1)h)\big)$.

◇ Les fonctions PYTHON pour la méthodes des rectangles (sous-entendu à gauche), des rectangles à droite et des trapèzes. Les paramètres sont : la fonction f, les bornes a et b de l'intervalle et l'entier n.

```python
def rectangles(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    s = 0
    for i in range(0,n):
        s = s+f(a+i*h)
    return h*s
```

```python
def rectangles_droite(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    s = 0
    for i in range(1,n+1):
        s = s+f(a+i*h)
    return h*s
```

```python
def trapezes(f,a,b,n):
    h = (b-a)/n
    s = f(a)/2+f(b)/2
    for i in range(1,n):
        s = s+f(a+i*h)
    return h*s
```

Pour la fonction **trapezes**, on a choisi d'écrire la somme T_n sous la forme

$$T_n = h\left(\frac{f(a)}{2}+\frac{f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)\right)$$

et ainsi le calcul est plus efficace.

◇ Exemple d'utilisation pour le calcul de

$$\int_1^3 3x^2\,\mathrm{d}x$$

On a choisi d'utiliser la méthode des rectangles et des trapèzes avec $n = 100$. On peut comparer les résultats obtenus avec la valeur exacte qui est 26.

```python
def g(x):
    return 3*x**2
print(rectangles(g,1,3,100))
```

```
25.760399999999997
```

```python
print(trapezes(g,1,3,100))
```

```
26.000399999999992
```

◇ Sur l'efficacité de ces méthodes :

- Le temps d'exécution de chacune de ces fonctions est $\mathrm{O}(n)$. Plus précisément, elle effectuent n ou $n+1$ appels de la fonctions f.
- On peut établir que la quantité $R_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de l'ordre de grandeur de $1/n$.
- On peut établir que la quantité $T_n - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est de l'ordre de grandeur de $1/n^2$.

Si l'on veut plus de précisions sur la qualité de l'approximation, il faut plus d'informations sur la fonction f.

◇ Le module SCIPY propose la commande **quad** permettant de calculer des valeurs approchées d'intégrales. Le résultat est composé de deux valeurs : la valeur approchée de l'intégrale et un nombre représentant une estimation de l'erreur commise dans l'approximation.

```python
from scipy.integrate import quad
print(quad(g,1,3))
```

```
(26.0, 2.886579864025407e-13)
```

```python
(I,err) = quad(g,1,3)
print(I)
```

```
26.0
```