



Suites et matrices

Gestion d'un stock

Une agence de location de voitures propose deux type de contrats : le contrat luxe propose des véhicules récents et le contrat confort des voitures plus anciennes. Pour l'année n , l'effectif de véhicules luxe est noté a_n et celui de véhicules confort est noté b_n . Entre l'année n et l'année $n + 1$, un tiers des véhicules luxe passe dans la catégorie confort et deux tiers des véhicules confort sont revendus. La catégorie luxe est par ailleurs complétée par un apport d'un effectif de c (c réel strictement positif fixé). L'année 0, tous les véhicules de l'agence sont de catégorie luxe et leur effectif est pris comme unité de référence. On a les relations de récurrence :

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 \\b_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} &= \frac{2}{3}a_n + c \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n\end{aligned}$$

On s'intéresse au comportement de a_n et b_n lorsque $n \rightarrow +\infty$ On voudrait en particulier répondre aux questions suivantes :

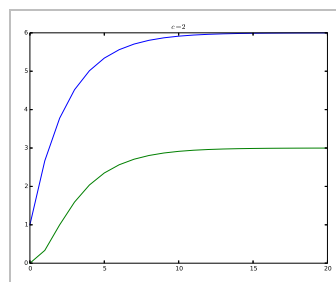
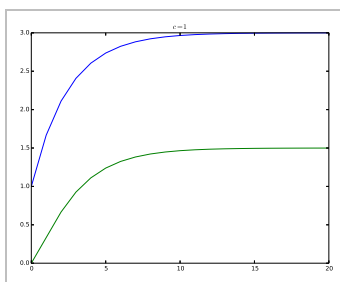
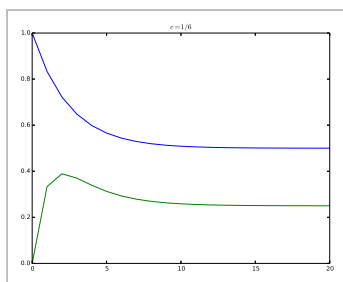
- Les suites (a_n) et (b_n) admettent-elles une limite lorsque $n \rightarrow +\infty$?
- Si oui, comment ces limites dépendent-elles de c ?

1. Écrire une fonction **a_et_b(n)** qui renvoie le couple (a_n, b_n) pour un entier n donné en supposant que $c = 1$.

2. Modifier la fonction précédente et l'écrire sous la forme **a_et_b(c, n)** pour que c soit pris en paramètre.

3. Modifier la fonction précédente pour qu'elle retourne le couple $([a_0, \dots, a_n], [b_0, \dots, b_n])$.

En utilisant ce programme, on obtient les tracés suivants :



4. En utilisant la fonction précédente, on remarque que les suites (a_n) et (b_n) semblent converger vers deux valeurs ℓ_c et ℓ'_c (dépendant de c). **Estimer** ces valeurs.

5. Compléter la matrice A pour que l'on ait la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. **Démontrer** qu'avec les valeurs ℓ_c et ℓ'_c obtenues à la question 4 on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} A \left(\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix} \right)$$

7. **Démontrer** que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3^n} A^n \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix} \right)$$

8. Écrire une fonction **puissances_A(k)** qui affiche la liste $[A^0, A^1, A^2, \dots, A^k]$.

En utilisant le programme précédent, on obtient pour les premières puissances de A :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 31 & 1 \end{bmatrix}$$

9. **Conjecturer** une expression de A^n et la **démontrer** par récurrence.

10. En déduire une expression de a_n et b_n pour $n \in \mathbb{N}$. **Démontrer** que les suites (a_n) et (b_n) convergent et donner leur limite.

Notes

◇ Un point important, mis en évidence lors de l'étude, est que les limites respectives de suite (a_n) et (b_n) dépendent de c *mais pas des valeurs initiales* a_0 et b_0 . Supposons par exemple que $c = 2$, alors $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$. On obtient par exemple $a_5 \simeq 5.34$ et $b_5 \simeq 2.34$. Supposons que le loueur de voitures décide, au bout de ces 5 années, de porter son stock de voitures de luxe à 9 (au lieu de la valeur 6 dont on s'approche). Il lui suffit changer la valeur c utilisée à partir de $n = 5$ pour prendre $c = 3$. On aura alors $a_{10} \simeq 8.51$ et $b_{10} \simeq 4.02$ (au lieu des valeurs $a_{10} \simeq 5.91$ et $b_{10} \simeq 2.91$ que l'on aurait obtenues en gardant la même valeur de c).

Corrections

1.

```
def a_et_b(n):  
    a=1  
    b=0  
    for k in range(n):  
        b=float(a+b)/3  
        # Ici, b contient b_{k+1}  
        # Ca ne pose pas de pb pour le calcul de a_{k+1}  
        # car celui-ci n'utilise pas b_k  
        a=float(2*a)/3+1  
    return (a,b)  
print a_et_b(10)
```

(2.965316940168335, 1.465325407712239)

2.

```
def a_et_b(c,n):  
    a=1  
    b=0  
    for k in range(n):  
        b=float(a+b)/3  
        # Ici, b contient b_{k+1}  
        # Ca ne pose pas de pb pour le calcul de a_{k+1}  
        # car celui-ci n'utilise pas b_k  
        a=float(2*a)/3+c  
    return (a,b)  
print a_et_b(2,10)
```

(5.9132923504208375, 2.9133262205964545)

3.

```
def a_et_b(c,n):  
    a=1  
    b=0  
    A=[a] # La liste des éléments de la suite a_n  
    B=[b] # La liste des éléments de la suite b_n  
    for k in range(n):  
        b=float(a+b)/3  
        # Ici, b contient b_{k+1}  
        # Ca ne pose pas de pb pour le calcul de a_{k+1}  
        # car celui-ci n'utilise pas b_k  
        a=float(2*a)/3+c  
        A.append(a)  
        B.append(b)  
    return (A,B)
```

4. Il semble que $\ell_c = 3c$ et $\ell'_c = 3c/2$.

5. On trouve $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. On a :

$$\frac{1}{3}A\left(\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2c \\ 3c/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix}$$

7. On considère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}(n) : \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^n}A^n\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix}\right)$$

- $\mathcal{H}(0)$ est vraie car $A^0 = I_2$;
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3}A\left(\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix}\right) \text{ (question précédente)} \\ &= \frac{1}{3}A\frac{1}{3^n}A^n\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix}\right) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{3^{n+1}}A^{n+1}\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_c \\ \ell'_c \end{bmatrix}\right)\end{aligned}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3^n}A^n\left(\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix}\right)$.

8. Une première possibilité :

```
import numpy as np
def puissances_A(k):
    A=np.array([[2,0],[1,1]])
    I=np.eye(2)
    M=I # Dans la boucle suivante, M contiendra A^j
    L=[M] # À la fin de la boucle, L contiendra A^0,...,A^k
    for j in range(k+1):
        M=np.dot(M,A)
        L.append(M)
    return L
print(puissances_A(2))
```

```
[array([[ 1.,  0.], [ 0.,  1.])), array([[ 2.,  0.], [ 1.,  1.])), array([[ 4.,  0.], [ 3.,  1.])), array([[ 8.,  0.], [ 7.,  1.]])]
```

On peut aussi utiliser des fonctionnalités de PYTHON :

```
def puissances_A(k):
    A=np.array([[2,0],[1,1]])
    return [np.linalg.matrix_power(A,j) for j in range(k+1)]
print(puissances_A(2))
```

[array([[1, 0], [0, 1]]), array([[2, 0], [1, 1]]), array([[4, 0], [3, 1]])]

9. On considère l'hypothèse de récurrence :

$$\mathcal{H}'(n) : A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Comme $A^0 = I_2$ et $2^0 = 1$, $\mathcal{H}'(0)$ est vraie ;
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{H}'(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A \times A^n = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ 2^{n+1} - 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ (en calculant le produit)} \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{H}'(n+1)$ est vraie.

Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix}$.

10. Avec le résultat de la question 7 :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3^n} A^n \begin{bmatrix} a_0 - 3c \\ b_0 - 3c/2 \end{bmatrix}$$

Avec l'expression de A^n obtenue à la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3c \\ 3c/2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3^n} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n - 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 - 3c \\ b_0 - 3c/2 \end{bmatrix}$$

En calculant le produit matriciel, on obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, a_n &= 3c + \left(\frac{2}{3}\right)^n (a_0 - 3c) \\ b_n &= \frac{3c}{2} + \frac{2^n - 1}{3^n} (a_0 - 3c) + \frac{1}{3^n} \left(b_0 - \frac{3c}{2}\right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}\right)^n &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } 0 \leq \frac{2}{3} < 1 \\ \frac{2^n - 1}{3^n} &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ \frac{1}{3^n} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3c$ et $b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3c/2$.