22

Résoudre un système 2×2

◇ On considère un système linéaire (S) à 2 équations et 2 inconnues x et y. On va déterminer l'ensemble des solutions de ce système par la méthode du pivot de Gauss.

◇ Représentation informatique :

- Le système $\begin{cases} ax+by=u \\ cx+dy=v \end{cases}$ sera représenté par la matrice 2×3 : $\begin{bmatrix} a & b & u \\ c & d & v \end{bmatrix}$;
- L'ensemble des solutions sera représenté par une liste de vecteurs de taille 2 (*array* à 1 dimension) :
  - — pas de solution : liste vide,
  - — unique solution (x_0, y_0) : la liste ne contient que $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$;
  - — solutions de la forme $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$: la liste contient $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$;
  - — tout couple (x, y) est solution : la liste contient $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

◇ Première étape du pivot de Gauss ($*$: coefficient non nul, ? : coefficient quelconque) :

- Si C_1 contient un coefficient non nul alors quitte à échanger L_1 et L_2 on obtient :

$$\begin{bmatrix} * & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \text{ puis (opérations sur les lignes) } M_1 = \begin{bmatrix} * & ? & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix}$$

- Si C_1 est nulle et C_2 contient un coefficient non nul, alors quitte à échanger L_1 et L_2 on obtient :

$$\begin{bmatrix} 0 & * & ? \\ 0 & ? & ? \end{bmatrix} \text{ puis (opérations sur les lignes) } M_2 = \begin{bmatrix} 0 & * & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$$

- Si C_1 et C_2 sont nulles, on a $M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{bmatrix}$.

⚠ Rappel : tester la nullité d'un flottant n'a pas de sens. La condition $x = 0$ est remplacée par $|x| \leqslant \varepsilon$ avec ε « assez petit. »

◇ Résolution du cas $M_1 = \begin{bmatrix} a \neq 0 & b & u \\ 0 & d & v \end{bmatrix}$:

- $d = 0$ et $v \neq 0$: pas de solution ;
- $d \neq 0$: unique solution $\begin{bmatrix} (u - bv/d)/a \\ v/d \end{bmatrix}$;
- $d = 0$ et $v = 0$: solutions $\begin{bmatrix} u/a \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -b/a \\ 1 \end{bmatrix}$.

◇ Résolution du cas $M_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \neq 0 & u \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix}$:

- $v \neq 0$: pas de solution ;
- $v = 0$: solutions $\begin{bmatrix} 0 \\ u/b \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

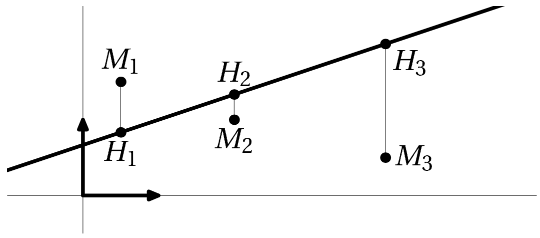
◇ Résolution du cas $M_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \end{bmatrix}$:

- $u \neq 0$ ou $v \neq 0$: pas de solution ;
- $u = v = 0$: tout couple (x, y) est solution.

Remarque. La mise en œuvre sera faite en TP. □

Application : régressions linéaires

◇ On considère des points du plan M_i de coordonnées (x_i, y_i) avec $1 \leqslant y \leqslant n$ et on cherche une droite $\mathscr{D} : y = ax + b$ qui passe *au plus près* de ces points. Une méthode consiste à choisir a et b de sorte que la quantité :



$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

soit minimale.

◇ On dérive par rapport à a et b :

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i) = 2as_{xx} + 2bs_x - 2s_{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 2as_x + 2nb - 2s_y$$

où on a posé :

$$s_x = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad s_y = \sum_{i=1}^{n} y_i \qquad s_{xx} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Le minimum est obtenu lorsque ces deux dérivées s'annulent. On obtient le système :

$$\begin{cases} s_{xx}a + s_x b = s_{xy} \\ s_x a + nb = s_y \end{cases}$$

Le coefficient de corrélation est $\rho = \sqrt{\dfrac{(ns_{xy} - s_x s_y)^2}{(ns_{xx} - s_x^2)(ns_{yy} - s_y^2)}}$, toujours compris entre 0 et 1.