



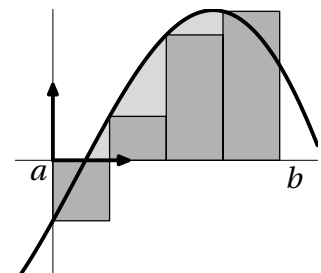
Approximations d'intégrales : la théorie

III. La méthode des rectangles

◇ Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$.
Pour $n \geq 1$, la somme :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

est l'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par la méthode des rectangles (à gauche).



◇ On donne deux versions de cet algorithme d'approximation. Première version :

```
def rect(f, a, b, n):
    s=0
    for k in range(n):
        s=s+f(a+float(k*(b-a))/n)
    return s*float(b-a)/n
```

Calcul de $\int_0^1 e^t dt$:

```
from math import exp
print rect(exp, 0, 1, 10)
```

1.63379939997

La seconde version utilise des spécificités de PYTHON :

```
def rect(f, a, b, n):
    s=sum([f(a+float(k*(b-a))/n) for k in range(n)])
    return s*float(b-a)/n
```

Remarque. On peut démontrer que, si $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$, alors

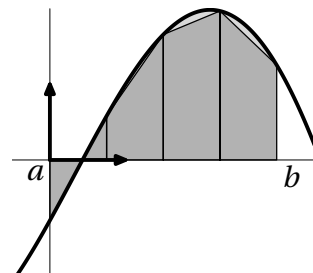
$$S_n(f) - \int_a^b f(t) dt = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

□

IV. La méthode des trapèzes

♦ L'approximation de $\int_a^b f(t) dt$ par la méthode des trapèzes est :

$$\begin{aligned} T_n(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} \left(f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1) \frac{b-a}{n}\right) \right) \\ &= \frac{b-a}{n} \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) + \frac{f(b)}{2} \right) \end{aligned}$$



♦ Mise en œuvre :

```
def trap(f, a, b, n):
    s=float(f(a)+f(b))/2
    for k in range(1,n):
        s=s+f(a+float(k*(b-a))/n)
    return s*float(b-a)/n
```

Calcul de $\int_0^1 e^t dt$:

```
print trap(exp, 0, 1, 10)
```

1.71971349139

On pourrait également donner une seconde version utilisant des spécificités de PYTHON.

Remarque. Comparaison des deux méthodes dans le cas de la fonction exponentielle sur $[0, 1]$. On a $\int_0^1 \exp(t) dt = e - 1$. $\square$

n	$S_n - (e - 1)$	$T_n - (e - 1)$
10	$-8.448243e-02$	$1.431663e-03$
100	$-8.577090e-03$	$1.431899e-05$
1000	$-8.589977e-04$	$1.431902e-07$
10000	$-8.591266e-05$	$1.431902e-09$

Remarque. On peut démontrer que si $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, alors

$$T_n(f) - \int_a^b f(t) dt = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \quad \square$$